TEMA 1: Nombres reals

1. NOMBRES REALS

1.1 NOMBRES RACIONALS

- El conjunt dels nombres racionals Q, està format per tots aquells nombres que es poden expressar com una fracció $\frac{a}{b}$, en que a i b són nombres enters i b≠0.

- Al calcular l'expressió decimal d'un nombre racional, dividint el numerador entre el denominador, s'obté un nombre enter o un nombre decimal exacte o periòdic (pur o mixt)

$$\text{Nombre racional}\begin{cases} \textit{Nombre enter}\begin{cases} \textit{Nombre natural}: 1,2,3\ \ldots \\ \textit{El número}: 0 \\ \textit{Enter negatiu}: -1,-2,-3\ \ldots . \end{cases} \\ \textit{Nombre decimal}\begin{cases} \textit{Decimal exacte}: 0.3, 0.25\ \ldots \\ \textit{Decimal periòdic}\begin{cases} \textit{Pur}: 0.\widehat{8},\ 0.\widehat{35} \\ \textit{Mixte}: 2.3\widehat{4},\ 0{,}243\widehat{57} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

- Cada conjunt de fraccions equivalents representen el mateix nombre racional i la fracció irreductible amb denominador positiu s'anomena fracció canònica.

1.2 NOMBRES IRRACIONALS

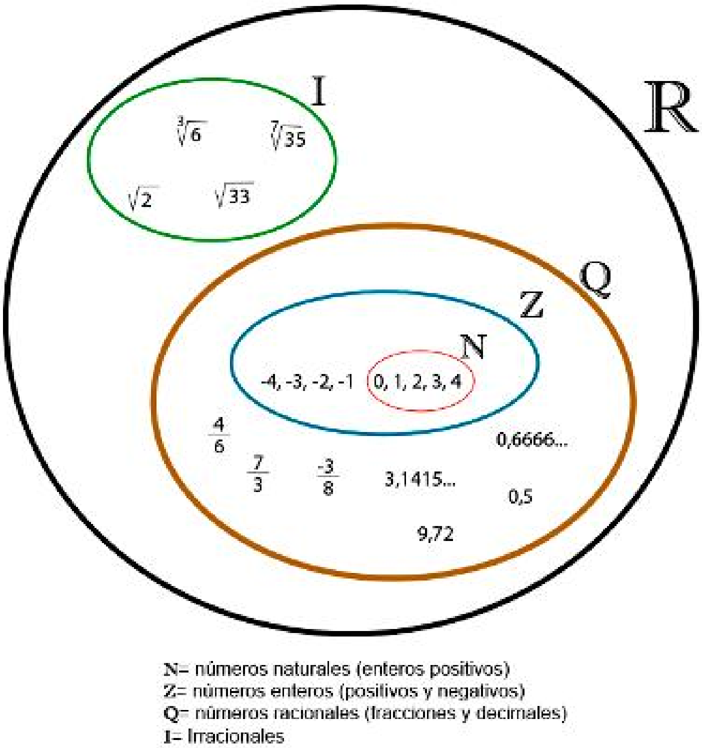
Els nombres que no és podem expressar amb forma de fracció s'anomenen nombres irracionals |I. La seva expressió decimal té un nombre infinit de xifres que no es repeteixen de forma periòdica.

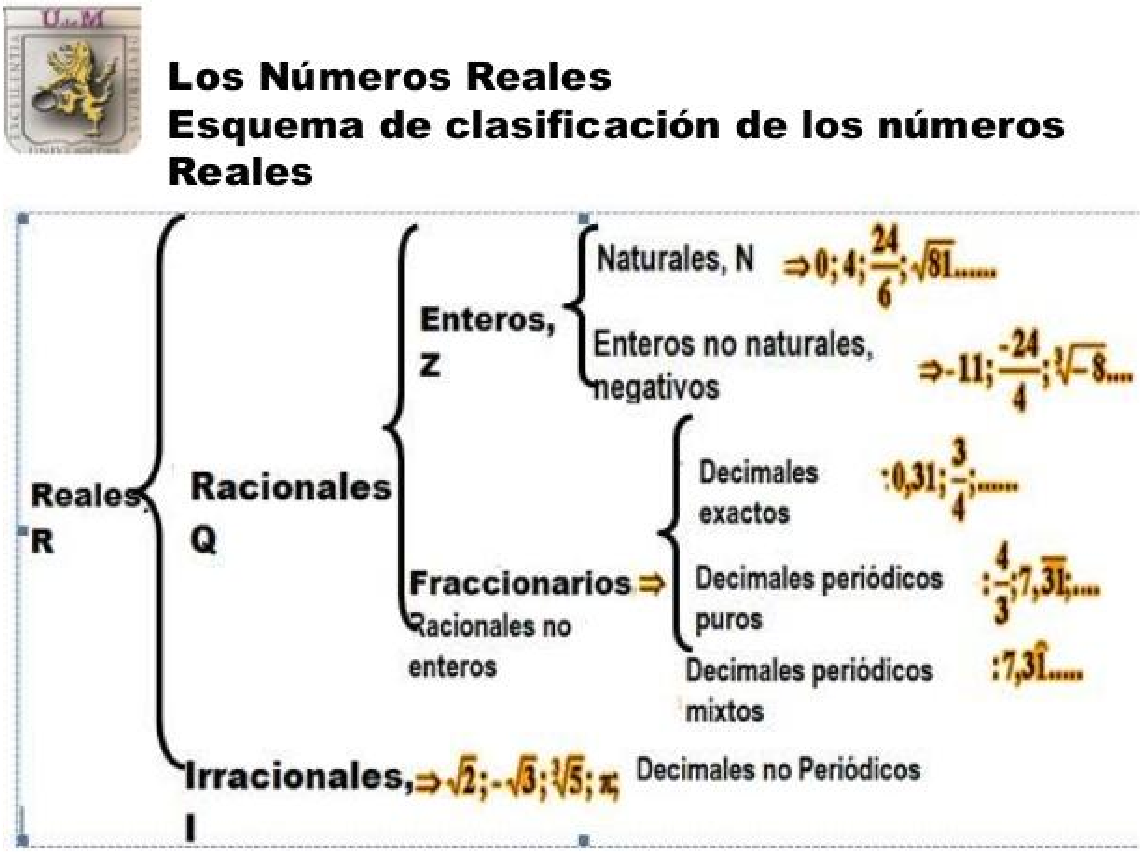
Són nombres irracionals les arrels no exactes ($\sqrt{5}$, $-\sqrt[5]{2}$,....), alguns nombres coneguts com $\pi = 3.141596....$, $e = 2{,}7182818....$

1.3 NOMBRES REALS

1.3.1 Definició

El conjunt dels nombres reals |R, està format pels nombres racional i irracionals





1.3.2 Propietats

Propietat	Suma	Producte
Associativa	(a + b) + c = a + (b + c)	(a · b) · c = a · (b · c)
Element neutre	a + 0 = a	a · 1 = a
Element oposat/ invers	a + (-a) = 0	$a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1 \quad a \neq 0$
Commutativa	a + b = b + a	a · b = b · a
Distributiva	a · (b + c) = a · b + a · c	

Teoria

2. POTÈNCIES

2.1. DEFINICIÓ

- Potència d'un nombre es el resultat que ens dona la multiplicació successiva d'un número per si mateix.

- Una potència es una manera abreviada d'escriure un producte d'un nombre per si mateix.

EXEMPLES:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$
$3 \cdot 3 = 3^2$
$(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^3$
$\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

$$\underbrace{a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \ldots \ldots}_{\text{n vegades}} \cdot a \cdot a$$

- En l'expressió de la potència d'un nombre es consideren dos parts:
- ➢ La base: és el nombre que se multiplica per si mateix
- ➢ L'exponent: es el nombre que indica les vegades que hem de multiplicar la base

$$base \leftarrow a^{n \rightarrow exponente}$$

- Per nombrar o llegir una potència diem primer la base i després l'exponent :
- ➢ Si l'exponent es un dos → elevat al quadrat
- ➢ Si l'exponent es un tres → elevat al cub
- ➢ En els demes casos es diu elevat a la quarta, a la quinta, a la sisena ....

2.2. SIGNE D'UNA POTÈNCIA

EXEMPLES:

Calculeu i indiqueu el signe de les següents potencies:

a) 2·2·2·2
b) 2·2·2·2·2
c) (-5)·(-5)·(-5)·(-5)
d) (-5)·(-5)·(-5)

Quadre resum:

Base \ Exponent	Parell	Senar
Positiva	+	+
Negativa	+	-

2.3. OPERACIONS AMB LES POTÈNCIES

2.3.1. Producte de potències de la mateixa base:

EXEMPLES:

a) $2^5 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 2^{5+3}$
b) $(-5)^3 \cdot (-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^7 = (-5)^{3+4}$

En general:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

2.3.2. Divisió de potències de la mateixa base:

EXEMPLES:

a) $\frac{2^6}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 2^{6-3}$

b) $\frac{5^7}{5^3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 2^{7-3}$

En general:

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

b) ARRELS

2.4. DEFINICIÓ

- La radicació és l'operació inversa de la potenciació-
- Anomenem arrel *n-éssima* d'un nombre donat *a* al nombre *b* que elevat a n ens dona *a*

Índex

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a}$$

$\sqrt[n]{a}$ → radicand

EXEMPLES:

a) $\sqrt[2]{9} = \pm 3$; ja que $3^2 = 9$; $(-3)^2 = 9$
b) $\sqrt[3]{8} = 2$; ja que $2^3 = 8$;
c) $\sqrt[4]{81} = \pm 3$; ja que $3^4 = 81$; $(-3)^4 = 81$
d) $\sqrt[5]{-32} = -2$; ja que $(-2)^5 = -32$
e) $\sqrt{-25} = \nexists$; ja que no hi ha cap nombre que elevat al quadrat doni com a resultat – 25

Indiqueu el nombre de solucions:

Índex / Radical	Parell	Senar
Positiva	Dues solucions ±	Una solució +
Negativa	No existeix solució	Una solució -

4.5. OPERACIONS AMB RADICALS DEL MATEIX ÍNDEX

2.4.1. Producte de radicals

EXEMPLES:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}}$$

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$

b) $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{27 \cdot 3} = \sqrt[4]{81} = \pm 3$

2.4.2. Quocient de radicals

EXEMPLES:

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$$

a) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = \pm 3$

b) $\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{8} = 2$

2.4.3. Potència de radicals

EXEMPLES:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

a) $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

b) $\left(\sqrt[4]{5}\right)^3 = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{25}$ No és exacta

2.4.4. Radical d'un radical

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

EXEMPLES:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2\cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = \pm 2$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{125}} = \sqrt[3\cdot 4]{125} = \sqrt[12]{125}$ No és exacta

2.4.5. Expressio d'un radical en forma de potencia

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

EXEMPLES:

a) $\sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}}$

b) $5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4}$

2.5. EXTRACCIÓ DE FACTORS D'UN RADICAL

Per extraure factors d'un radical :

Es descompon el radicant en factors. Si

- Un exponent és menor que l'índex, el factor corresponent se deixa en el radicant
- Un exponent és igual a l'índex, el factor corresponent surt fora del radicant
- Un exponent és major que l'índex, es divideix l'exponent per l'índex: el quocient que s'obté és l'exponent del factor que surt de l'arrel i el residu és l'exponent del factor de dintre del radicant.

EXEMPLES:

a) $\sqrt{2\cdot 3^2\cdot 5^5} = 3\cdot 5^2\cdot \sqrt{2\cdot 5}$

b) $\sqrt[4]{2^7\cdot 3^{14}\cdot 5^4} = 2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot \sqrt[4]{2^3\cdot 3^2}$

2.6. INTRODUCCIÓ DE FACTORS EN UN RADICAL

S'introdueixen els factors elevats a l'índex corresponent del radical

EXEMPLES:

a) $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2\cdot 3} = \sqrt{12}$

b) $3^3\cdot 5^2\cdot \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{(3^3)^4\cdot (5^2)^4\cdot 7} = \sqrt[4]{3^{12}\cdot 5^8\cdot 7}$

2.7. SUMA (RESTA) DE RADICALS

Només es poden sumar (restar) dos radicals quan són radicals semblants, es a dir, si són radicals amb el mateix índex i igual radicant.

EXEMPLES:

a) $2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2-4+1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

b) $3\sqrt[5]{5} - 2\sqrt[5]{5} - \sqrt[5]{5} = (3-2-1)\sqrt[5]{5} = 0\sqrt[5]{5} = 0$

c) $\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75} = \sqrt{2^2\cdot 3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5^2\cdot 3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$