TEMA 1 : Aplicacions de les derivades

Activitats

1. Trobeu una equació de segon grau tal que $f(0) = 2$, $f'(0) = -4$ i $f''(0) = 6$

2. Trobeu una funció $y = f(x)$ que compleix les següents condicions:
   a) $f'(x) = 3x^2 + 4x + 5$
   b) Passa pel punt P (-2, 6)

3. Trobeu l'equació de la recta tangent i normal a la corba d'equació $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ en el punt d'abscissa $x = 0$. Determineu els punts on la tangent a la corba és horitzontal.

4. Calculeu l'equació de la recta tangent i normal a la corba $f(x) = x^2$ en el punt d'abscissa 2

5. Trobeu una funció de segon grau sabent que passa per punt P(1,0) i que la pendent de la recta tangent en el punt Q(2,-1) val 0

6. Determineu l'equació de la recta tangent a la paràbola d'equació $y = x^2$ paral·lela a la recta d'equació $y = 4x$.

7. Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $f(x) = x^2 - 3x + 4$ paral·lela a la recta d'equació $3x - y = 2$

8. En quin punt de la corba de la funció $f(x) = x \cdot \ln x - x$, la pendent de la recta tangent val 1.

9. En quins punt la tangent a la corba $f(x) = 6x^3 + 9x^2 - 2$ és paral·lela a l'eix OX.

10. Determineu *m* de manera que la tangent a la corba $y = -x^2 - (2m + 1)x + m + 2$ en $x = 2$, sigui paral·lela a la recta $3x - y + 2 = 0$.

11. Sigui la funció $f(x) = x^2 + ax + 3$, determineu el valor de *a* perquè la gràfica de f tingui una tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ paral·lela a la recta $2x + y = 0$.

12. Determineu l'equació de la recta tangent a $f(x) = x^2 + 4x + 1$ que té una inclinació de 30º.

13. Trobeu les equacions de les rectes tangents a la corba $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$, amb pendent 5. Hi ha alguna amb pendent 1?. Hi ha cap valor de pendent al qual correspongui una única recta tangent?.

14. Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ paral·lela a la bisectriu del primer quadrant.

15. Considereu la funció $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$. Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica en el punt d'abscissa $x = 0$. Trobeu si hi ha altres punts en els quals el pendent de la tangent sigui igual al que s'ha obtingut.

16. Donades les funcions $f(x) = x^2 - ax - 4 \quad i \quad g(x) = \dfrac{x^2}{2} + b$

a) Calculeu a i b de manera que les gràfiques de f(x) i de g(x) siguin tangents en el punt d'abscissa $x = 3$, es a dir, que tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt.

b) Trobeu l'equació d'aquesta recta tangent

17. Calculeu els intervals de creixement i decreixement de les funcions següents:

$a) f(x) = 4 + 15x + 6x^2 - x^3$

$b) f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 8$

$c) f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + x - 2}$

$d) f(x) = \sqrt{x+1}$

$e) f(x) = e^{-(x-1)^2}$

f) $f(x) = x \cdot \ln x$

18. Calculeu els màxims i mínims de les funcions següents:

$a) f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$

$b) f(x) = e^x \left(2x^2 + x - 8\right)$

$c) f(x) = x + \ln\left(x^2 - 1\right)$

$d) f(x) = \sin 2x$

19. Trobeu els intervals de concavitat i convexitat i les punts d'inflexió de les funcions:

$a) f(x) = x^3 - 6x^2 + 11$ $\quad b) f(x) = x^4 - 6x^2 + 11$ $\quad c) f(x) = e^{-x^2}$

20. Determineu a, b i c per a que la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + cx + d$, tingui un màxim en $x = -4$, i un mínim en $x = 0$ i $f(1) = 1$

21. Determineu a, b i c per a que la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + cx + d$, tingui un màxim en (0,4), i un mínim en (2,0)

22. Determineu a, b i c, e per a que la funció $f(x) =ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, tingui un punt crític en (1,3) i un punt d'inflexió amb tangent d'equació $y = 2x$ en (0,0)

23. La corba $f(x) = x^3 + ax^2 + cx + d$ talla a l'eix d'abscisses en $x = 3$ i té un punt d'inflexió en $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{9}\right)$. Trobeu a, b i c.

24. Donada la funció: $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + ax + c}$, calculeu a, b i c de manera que f(x) tingui en (2,-1) un extrem relatiu i que la corba passi per l'origen de coordenades.

25. Trobeu a i b perquè la funció $f(x) = a \cdot \ln x + bx^2 + x$ tingui extrems en els punts $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$. Per aquests valors de a i b, quin tipus d'extrems te la funció en $x = 1$ i $x = 2$

24. Trobeu el triangle isòsceles d'àrea màxima inscrit en un cercle de radi 12cm.

25. Un triangle isòsceles de perímetre 30cm gira sobre la seva altura generant un con. Quin valor hi ha que donar a la base per tal que el volum del con sigui màxima?

26. Es vol fabricar una llauna de conserva cilíndrica (amb tapa) d'1 litre de capacitat. Quines has de ser les seves dimensions per tal d'utilitzar el mínim possible de metall?

27. Descomponeu el nombre 44 en dos sumands tals que el quíntuple del quadrat del primer mes el sèxtuple del quadrat del segon sigui un mínim.

28. Es té un filferro de 1m de longitud i es vol dividir-lo en dos trossos per formar un cercle i un quadrat. Determineu la longitud de cada tros per tal que la suma de les àrees del cercle i el quadrat sigui mínima.

29. Trobeu les dimensions del rectangle més gran inscrit en un triangle isòsceles que te una base de 10cm i una altura de 15cm.

30. Trobeu les dimensions que fan mínim el cost d'un contenidor que té forma de paral·lelepípede rectangular si se sap que el seu volum ha de ser de 9m3 i una altura de 1m, i el cost de la seva construcció de 50 € per m2 per a la base i de 60 € per la tapa i 40 € per cada paret lateral.

31. Es retalla cada canto d'una làmina de cartó de dimensions 80cm per 50cm, com s'indica en la figura , per construir una caixa. Calculeu x, per tal que el volum de la caixa sigui màxim.

32. Un full ha de tenir 18cm2 de text, marges superior i inferior de 2cm d'altura i marges laterals de 1cm d'amplada. Trobeu les dimensions que minimitza la superfície del full.

33. El benefici net mensual, en milions d'euros, d'una empresa que fabrica autobusos ve donat per la funció:
B(x) = 1.2x – (0.1x)3 on x es el nombre d'autobusos fabricats en un mes.
a) Calculeu la producció mensual que fa màxim el benefici
b) El benefici corresponent a dita producció

34. Un hort té acumulat 25 arbres, que produeixen 600 fruites cadascun. Se calcula que per cada arbre addicional plantat, la producció de cada arbre disminueix en 15 fruits. Calculeu:
a)La producció actual del hort
b)La producció que s'obtindria de cada arbre si es planten x arbres més
c)La producció a la que a la qual ascendiria el total del hort si es plantessin x arbres més.
d)Quin ha de ser el nombre total d'arbres que ha de tenir l'hort per tal que la producció sigui màxima?

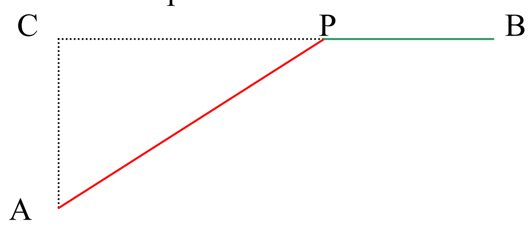
35. Un sector circular té 10cm de perímetre. Calculeu el radi i l'amplitud del sector de major àrea.

36. De totes les rectes que passen per el punt P(1,2), trobeu la que determina amb els eixos de coordenades i el primer quadrant un triangle d'àrea mínima.

37. Un triangle isòsceles el costat desigual mesura 12cm i l'altura relativa a aquest costat és de 5cm. Trobeu un punt sobre l'altura tal que la suma de les distàncies als tres vèrtex sigui mínima.

38. Donada la funció en l'interval [1, e] per f(x) = $\frac{1}{x}$ + lnx, determineu quines de les rectes tangents a la gràfica de f(x) tenen la màxima pendent.

39. Un nedador A, es troba a 3km de la platja en front de la caseta C. Vol anar a B en la platja, a 6 km de la caseta. Sabent que nada a 3km/h i corre per l'arena a 10km/h, trobeu en quint punt ha d'anar nedant per arribar a B en el menor temps possible.



40. Determineu dos nombres reals que sumen N i que el producte sigui màxim.

41. De tots els rectangles de perímetre P determineu les mesures del que tingui àrea màxima.

42. De tots els triangles isòsceles inscrits en una circumferència de radi R, calculeu el de major àrea.

43. De tots els rectangles de perímetre P determineu el que tingui mínima diagonal.

44. De tots els rectangles inscrits en una semicircumferència de radi R determineu el de major àrea. (Un costat està en el diàmetre).

45. De tots els triangles isòsceles circumscrits a un circumferència de radi R determineu el d'àrea mínima.

46. Volem construir un dipòsit de forma cilíndrica el volum del qual sigui 2π m3. Quines han de ser les seves dimensions perquè la superfície total sigui mínima?