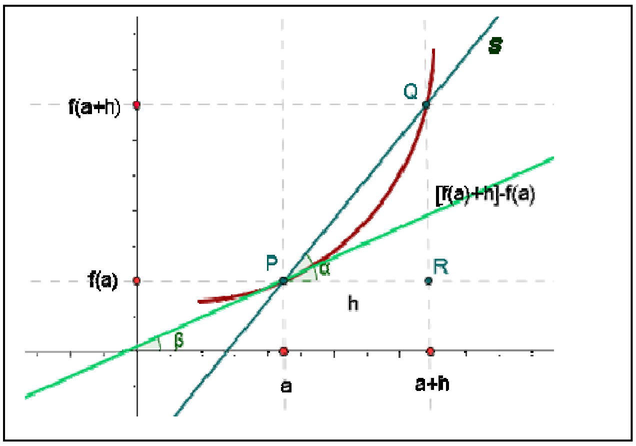
TEMA 1 : Aplicacions de les derivades

Derivada d'una funció en un punt

El límit, $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, si existeix i és finit s'anomena *derivada de la funció f en el punt $x_0 = a$* i es designa per f'(a).

Gràficament f'(a) significa el pendent de la recta tangent a la gràfica de f(x) en el punt d'abscisses $x_0 = a$



f'(a) = tg α

- Si existeix f'(a) es diu que f és *derivable en $x_0 = a$*

Derivades: aplicacions

a) Recta tangent i normal a una corba en un dels seus punts
b) Creixement i decreixement d'una funció. Màxims i mínims
c) Concavitat i convexitat d'una funció. Punts d'inflexió
d) Problemes d'optimització
e) Aplicacions físiques de la derivada

a) Recta tangent i normal a una corba en un dels seus punts

L'obtenció de la recta tangent a una corba en un dels seus punts és l'aplicació més immediata de les derivades, perquè com sabem, $f'(x_0)$ és el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = f(x_0)$ en el punt d'abscissa x_0.

Si $f(x)$ és derivable en x_0, l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt $P(x_0,y_0) = P(x_0,f(x_0))$ és:

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)}$$ *Equació de la recta tangent*

Ex: Trobeu l'equació de la recta tangent a la corba $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x+3}$ en $x_0 = 3$

f és continua i derivable en x_0

$$y_0 = y(3) = \frac{9-6}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+3)-(x^2-2x}{(x+3)^2} = \frac{2(x^2+3x-x-3)-x^2+2x}{(x+3)^2} =$$

$$\frac{2x^2+6x-2x-6-x^2+2x}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x-6}{(x+3)^2}$$

$$f'(3) = \frac{9+18-6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

Equació de la recta tangent: $\boxed{\left(y-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}(x-3)}$

Anomenem *recta normal* a una corba en un dels seus punt, a la recta perpendicular a la recta tangent a la corba en aquest punt.

Recordant la condició de perpendicularitat de dues rectes la pendent de la recta normal a la funció $f(x)$ en el punt x_0 serà: $\dfrac{-1}{f'(x_0)}$ i la seva equació serà:

$$\boxed{y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}\cdot (x - x_0)}$$ *Equació de la recta normal*

Ex: Trobeu l'equació de la recta normal a la corba del exemple anterior en el punt $x_0 = 3$

Equació de la recta normal: $\left(y-\frac{1}{2}\right) = \frac{-12}{7}(x-3)$

b) Creixement i decreixement d'una funció. Màxims i mínims

Una funció és creixent en un interval (a,b), si $\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$, si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Si f(x) és derivable en (a,b) $\Rightarrow f'(x)>0\ \forall x \in (a,b)$.
• Demostració:
Siguin x i x_0 dos valors que pertanyen a l'interval (a,b) on la funció f(x) és creixent, de forma que $x_0 < x$ i $f(x_0) < f(x)$. Si definim $x = x_0 + h$

el signe de $x - x_0$ és +	$\rightarrow$	el signe de h és +
el signe de $f(x) - f(x_0)$ és +	$\rightarrow$	el signe de $f(x_0+h) - f(x_0)$ és +

de forma que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$$

Una funció és decreixent en un interval (a,b), si $\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$, si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

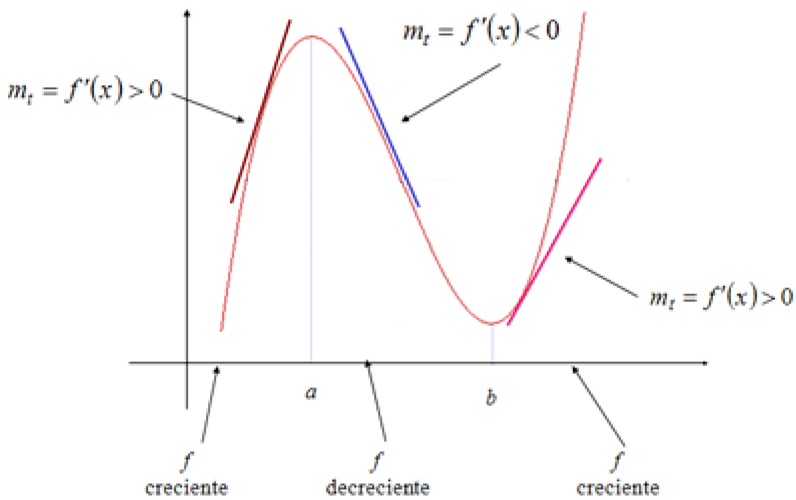
Si f(x) és derivable en (a,b) $\Rightarrow f'(x)<0\ \forall x \in (a,b)$.
• Demostració:
Siguin x i x_0 dos valors que pertanyen a l'interval (a,b) on la funció f(x) és decreixent, de forma que $x_0 < x$ i $f(x_0) > f(x)$. Si definim $x = x_0 + h$

el signe de $x - x_0$ és +	$\rightarrow$	el signe de h és +
el signe de $f(x) - f(x_0)$ és -	$\rightarrow$	el signe de $f(x_0+h) - f(x_0)$ *és -*

de forma que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} < 0$$

Gràficament,



Ex: Estudieu els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Per determinar en quins intervals f(x) és creixent o decreixent cal veure en quins intervals la derivada primera és positiva i en quins és negativa. Primer trobem els valors on s'anul·la

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0$$
$$x = \pm 1$$

La recta real queda dividida en tres intervals:

$$-\infty \quad \text{———} \;-1\; \text{———} \;+1\; \text{———} \quad +\infty$$

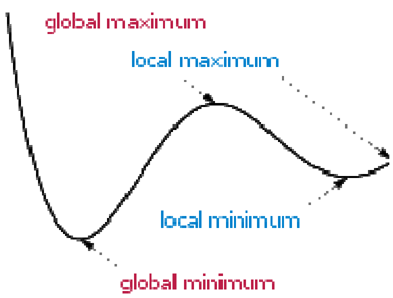
Per estudiar el signe de la derivada en cadascun d'ells agafarem un valor x qualsevol de cada interval i veurem quin signe té f'(x). Si per aquest valor el resultat és positiu, la derivada primera per qualsevol punt de l'interval també serà positiva i la funció serà creixent. Si el resultat és negatiu tot l'interval serà decreixent.

	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
$f'(x)$	$f'(-2) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(2) > 0$	
$f(x)$	↗	↙	↗	

f(x) creixent $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
f(x) decreixent $(-1, 1)$

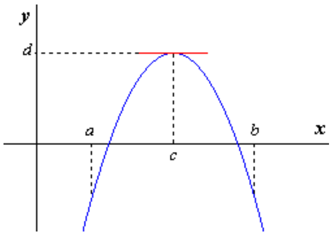
Màxim i mínim relatiu

- $f(x)$ té un màxim relatiu en x_0 si $\exists\ a \in |R \ / \ \forall\ x \in (x_0 - a, x_0 + a) \Rightarrow f(x) > f(x_0)$
- $f(x)$ té un mínim relatiu en x_0 si $\exists\ a \in |R \ / \ \forall\ x \in (x_0 - a, x_0 + a) \Rightarrow f(x) < f(x_0)$

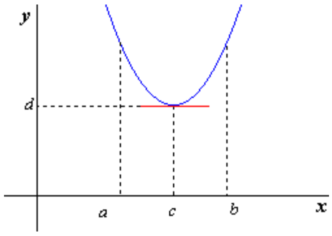


Observem que en aquests punts la recta tangent a la corba serà horitzontal i el seu pendent 0, així, si $f(x)$ té un màxim o un mínim relatiu en $x_0 \Rightarrow f'(x_0)=0$

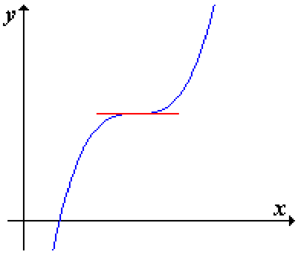
La condició contrària no es dona, es a dir, el fet que f ‘(x_0)=0 no implica que en x_0 hagi un extrem relatiu.
Gràficament,



màxim relatiu



mínim relatiu



Punt d’inflexió

els punts de tangent horitzontal, es a dir aquells on f’(c) = 0 s’anomenen **punts singulars** o **punts crítics**.

Per saber si un punt crític correspon a un extrem relatiu o no haurem d’estudiar el signe de la derivada primera al voltant d’aquest punt,

- si abans de x_0 f’(x) és positiva i després és negativa la funció passa de creixent a decreixent i en P = (x_0 , f(x_0)) tenim un màxim relatiu;
- si abans de x_0 f’(x) és negativa i després és positiva la funció passa de creixent a decreixent i en P = (x_0 , f(x_0)) tenim un màxim relatiu;
- en qualsevol altre cas és tracta d’un punt d’inflexió.

Ex: Determineu els extrems relatius de la funció $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Tal i com ja hem vist anteriorment, primer trobem els intervals de creixement i decreixement igualant a zero la derivada primera i estudiant el signe de f’(x) en els intervals obtinguts.

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$
$$f\,'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f\,'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0$$
$$x = \pm 1$$

$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
f ’(x)	*f ‘(-2) > 0*		*f ‘(0) < 0*		*f ‘(2) > 0*	
f(x)	↗		↙		↗	

Com la funció és contínua i passa de creixent a decreixent, en $P_1 = (-1,4)$ hi ha un màxim relatiu

Com la funció és contínua i passa de decreixent a creixent, en $P_2 = (1,0)$ hi ha un mínim relatiu

• En tots els casos anteriors, per l'estudi del creixement / decreixement i els extrems relatius, hem suposat que la funció f(x) era contínua. Si f(x) no és contínua, inclourem en el moment d'estudiar els signes de la derivada primera els punts de discontinuïtat.

Ex: Estudieu els intervals de creixement/decreixement i els extrems relatius de la funció

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x - 1}$$

Dom f = |R – {1}

$$f'(x) = \frac{(3x^2-1)\cdot(x-1)-(x^3-x)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{3x^3-3x^2-x+1-x^3+x}{(x-1)^2} = \frac{2x^3-3x^2+1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3-3x^2+1}{(x-1)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

	2	-3	0	1
1		2	-1	-1
	2	-1	-1	0
1		2	1	
	2	1	0	

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)^2 \cdot (2x-1) = 0 \quad \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ 2x-1=0 \rightarrow x=1/2 \end{cases}$$

Un dels possibles extrem relatius no pertany al domini, x=1 serà un punt de discontinuïtat, però l'haurem de tenir en compte en el moment de dividir la recta real en intervals per estudiar el signe de la derivada.

$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
f '(x)	*f '(-2) < 0*		*f '(3/4) > 0*		*f '(2) > 0*	
f(x)	↙		↗		↗	

Com la funció passa de decreixent a creixent, en P = (1/2,7/4) hi ha mínim relatiu

Com la funció és discontínua en x=1 no hi ha extrem relatiu ni punt d'inflexió

f(x) és creixent en $(1/2,1) \cup (1,+\infty)$

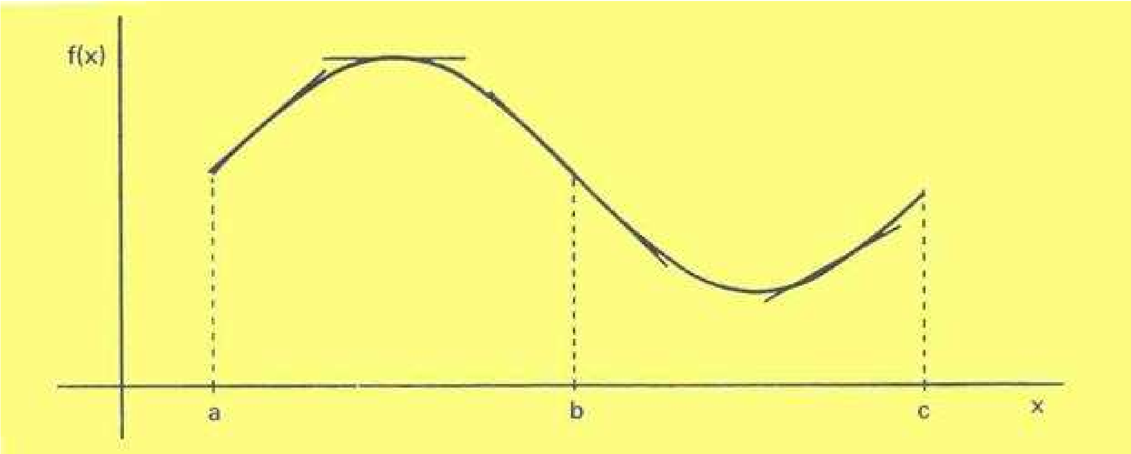
decreixent en $(-\infty,1/2)$

i amb un mínim relatiu en (1/2,7/4)

c) Concavitat i convexitat d'una funció. Punts d'inflexió

f(x) és còncava en un interval quan les rectes tangents a la corba en els punts de l'interval es troben per sobre del gràfic.

f(x) és convexa en un interval quan les rectes tangents a la corba en els punts de l'interval es troben per sota del gràfic.



S'anomena punt d'inflexió P.I a aquell on es produeix un canvi de concavitat a convexitat o al reves (al gràfic x=b és un punt d'inflexió).

• Si observem el gràfic, i seguim la corba f(x) des de x=*a* a x=*b,* veiem que el pendent de la recta tangent comença essent positiu, però conforme ens apropem al màxim relatiu el valor de f'(x) va disminuint fins ser 0; si continuem cap a *b* el pendent és ara negatiu i cada vegada té un valor absolut major → en l'interval (a,b) la funció f '(x) és decreixent i, en conseqüència, la funció f ''(x) és negativa.

De la mateixa manera, si observem el gràfic de x=*b* a x=*c*, deduïm que en l'interval (b,c) la funció f '(x) és creixent i la funció f ''(x) és positiva

Sigui f (x) i f '(x) són derivables en x_0, si

$f''(x_0) < 0$	f(x) és convexa en x_0
$f''(x_0) > 0$	f(x) és còncava en x_0
$f''(x_0) = 0$	?, si $f'''(x_0) \neq 0$ és un P.I

En general

$f''(x_0) < 0 \rightarrow$ f(x) és convexa en x_0

$f''(x_0) > 0 \rightarrow$ f(x) és còncava en x_0

$$f''(x_0) = 0 \begin{cases} f'''(x_0) \neq 0 \rightarrow \text{f(x) té un punt d'inflexió en } x_0 \\ f'''(x_0) = 0 \begin{cases} f^{iv}(x_0) < 0 \rightarrow \text{f(x) és convexa en } x_0 \\ f^{iv}(x_0) > 0 \rightarrow \text{f(x) és còncava en } x_0 \\ f^{iv}(x_0) = 0 \rightarrow \quad \ldots \end{cases} \end{cases}$$

Ex: Estudieu la curvatura de la funció $f(x) = 3x^4 – 8x^3 + 5$

Dom f = |R   continua

$f'(x) = 12x^3 – 24x^2$

$f''(x) = 36x^2 - 48x \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x – 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Aquests valors hem determinen tres intervals en la recta, en els que estudiarem el signe de la derivada segona

$-\infty$		0		4/3		$+\infty$
$f''(x)$	$f''(-2) > 0$		$f''(1/2) < 0$		$f''(2) > 0$	
$f(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$	

Com la funció passa de còncava a convexa, en P =(0,5) hi ha un punt d'inflexió

Com la funció passa de convexa a còncava en Q = (4/3,-121/27)hi ha un punt d'inflexió

f(x)   *és còncava per* $x \in (-\infty, 0) \cup (4/3, +\infty)$
és convexa per $x \in (0, 4/3)$

Ex: Determineu els punts d'inflexió de $f(x) = x^3 – 3x + 2$

$f(x) = x^3 – 3x + 2$ *continua*

$f'(x)=3x^2 – 3$

$f''(x) = 6x$

Possibles punts d'inflexió de f(x) $\rightarrow f''(x) = 0$
$6x = 0$
$x = 0$

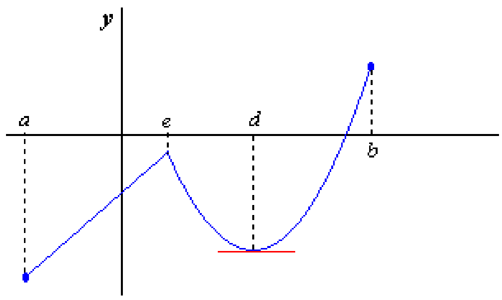
$f'''(0) = 6 \neq 0$ *(0 , 2) és un punt d'inflexió de f(x)*

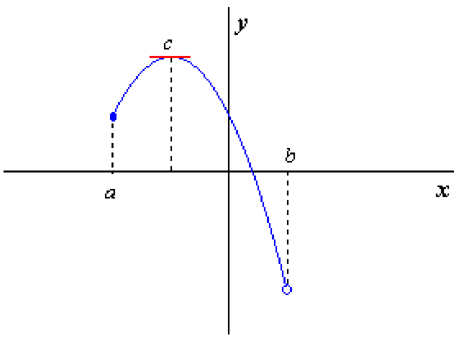
d) Problemes d'optimització

Amb molta freqüència apareixen problemes físics, geomètrics, econòmics, biològics ..., en els quals es tracta d'optimitzar una funció: fer màxim un volum , un benefici, una població, fer mínims uns costos, una àrea... Aquesta funció pot venir donada per una o dues incògnites, en aquest cas cal expressar una d'elles a partir de l'altre.

En els problemes d'optimització, el que interessa no són els extrems relatius de la funció si no els absoluts. Vegem algunes regles per obtenir-los.

a) Si f(x) és derivable en [a,b] els màxims i mínim absoluts estan entre els punts singulars i els extrem de l' interval.



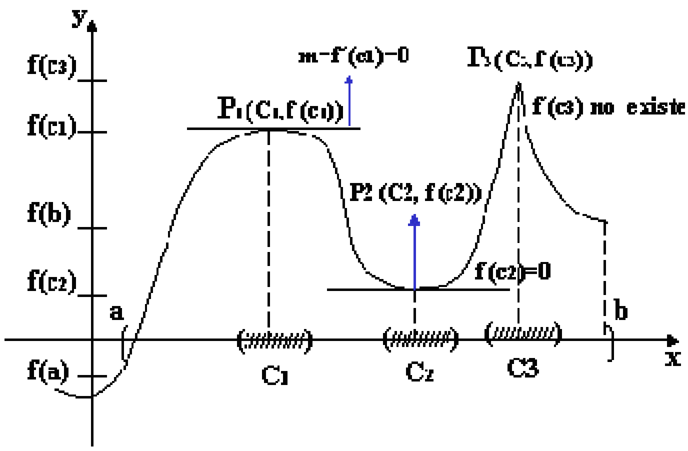


En aquest cas:

- Es troben els extrems relatius (màxims i mínims relatius) x_1, x_2, x_3,..
- Es calcula f(a), f(x_1), f(x_2), ... f(b) i amb aquests valor veurem quin és el màxim absolut (valor més gran) i quin el mínim absolut (valor més petit)

b) Si hi ha algun punt de [a,b] en que la funció no és derivable, encara que sí continua, caldrà mirar també a més a més el valor de la funció en aquest punt.

c) Si f no és continua en algun punt de [a,b] estudiarem el comportament en les proximitats d'aquest punt.



Ex: S'ha de construir un dipòsit cilíndric de $81\pi\,m^3$ de volum. La superfície lateral ha de ser construïda amb un material que costa 30 €/m^2, i les dues bases amb un material que costa 45 €/m^2.

a) Determineu la relació que hi ha entre el radi r de les dues bases circulars i l'altura h del cilindre, i doneu el cost C (r) del material necessari per construir aquest dipòsit en funció de r
b) Quines dimensions ha de tenir el dipòsit perquè el cost dels materials necessaris sigui el mínim possible?

a)

Volum cilindre: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
Superfície lateral: $S_l = 2\,\pi \cdot r \cdot h$
Superfície bases: $S_b = 2 \cdot \pi \cdot r^2$

Cost: $C = 30 \cdot S_l + 45 \cdot S_b$
$C(r, h) = 30 \cdot 2\,\pi \cdot r \cdot h + 45 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2$

La relació entre el radi r i l'altura h es calcula a partir del volum:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$81\pi = \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$h = \frac{81\pi}{r^2}$$

b)

Funció a minimitzar: $C(r, h) = 30 \cdot 2\,\pi \cdot r \cdot h + 45 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2$

$$C(r) = 60\,\pi \cdot r \cdot \frac{81\pi}{r^2} + 90\,\pi \cdot r^2$$

$$C(r) = \frac{4860\pi}{r} + 90\pi \cdot r^2$$

$$C'(r) = -\frac{4860\pi}{r^2} + 180\pi \cdot r$$

Extrems relatius: $C'(r) = 0$

$$0 = -\frac{4860\pi}{r^2} + 180\pi \cdot r$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{4860\pi}{180\pi}} = 3$$

Comprovem que r = 3 sigui un mínim amb la derivada segona:

$$C''(r) = \frac{9720\pi}{r^3} + 180\pi$$

$C''(3) > 0$ *a* $r = 3$ *hi ha un mínim*

radi = 3m i altura = 9 m

e) Aplicacions físiques de la derivada

Velocitat mitjana v_m $\quad$ $v_m = \dfrac{\Delta e}{\Delta t} = \dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

Velocitat instantània $\quad$ $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta e}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = e'(t)$

Acceleració instantània $\quad$ $a = v'(t) = e''(t)$