GEOMETRIA ANALÍTICA AL PLA. VECTORS

Vectors

Amb origen al punt A = (a_1, a_2) i extrem al punt B = (b_1, b_2) $\overrightarrow{AB}$ = (b_1- a_1 , $b_2 - a_2$)
o amb origen i extrem desconegut $\vec{v} = (v_1, v_2)$

· Característiques:

a) Mòdul $|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$
b) Direcció. Es determina mitjançant l'angle que forma el vector amb la horitzontal (argument)

Direcció: $\tan \alpha = \dfrac{v_2}{v_1}$ argument = α = arc tan $\dfrac{v_2}{v_1}$

c) Sentit. Per exemple NE

· Vectors equipol·lents. Són vectors que tenen el mateix mòdul, direcció i sentit, la qual cosa fa que tinguin els mateixos components (Es diferencien en l'origen i l'extrem)

· Operacions amb vectors $\vec{v}$ = (v_1 , v_2) i $\vec{w}$ = (w_1 , w_2)

a) Suma $\vec{v} + \vec{w}$ = (v_1+w_1 , v_2+w_2)
b) Producte per un nombre K $\in$ |R K · $\vec{v}$ = (K · v_1 , K · v_2)
c) Resta $\vec{v}$ - $\vec{w}$ = (v_1-w_1 , v_2-w_2)

· Combinació lineal de vectors. El vector $\vec{w}$ és combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ si , $\exists \lambda, \mu \in$ |R / $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu$ v

· Dependència i independència lineal de dos vectors

- $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment dependents si $\exists K \in$ |R / $\vec{u} = K \vec{v}$ (es a dir, les seves components són proporcionals i tenen la mateixa direcció)
- $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment independents si no es pot expressar un d'ells en funció de l'altre (les direccions són diferents). Al pla hi ha com a màxim dos vectors linealment independents que formen una base, qualsevol altre vector és combinació lineal d'aquests

· Producte escalar. $\vec{v}$ = (v_1 , v_2) i $\vec{w}$ = (w_1 , w_2)

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |w| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{w})$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$

$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

· Punt mitjà d'un segment d'extrems A= (x_1 , y_1) i B = (x_2 , y_2)

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Rectes en el pla

Equació		Vector director	Pendent	Punts de pas
Vectorial	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\ \vec{v}$ $(x, y) = (x_1, y_1) + K(v_1, v_2)$	$\vec{v} = (v_1, v_2)$	$\dfrac{v_2}{v_1}$	(x_1, y_1)
Paramètriques	$x = x_1 + k\, v_1$ $y = y_1 + k\, v_2$			
Contínua	$\dfrac{x - x_1}{v_1} = \dfrac{y - y_1}{v_2}$			
Punt – pendent	$y - y_1 = m(x - x_1)$		m	(x_1, y_1)
Explícita	$y = mx + n$		m	$(0, n)$ $(\dfrac{-n}{m}, 0)$
General, implícita o cartesiana	$Ax + By + C = 0$	$\vec{v} = (-B, A)$	$\dfrac{A}{-B}$	$(0, -C/B)$ $(-C/A, 0)$

• Posició relativa de dues rectes

Equació	Rectes		
	Secants	Coincidents	Paral·leles
r_1: $y = m_1 x + n_1$ r_2: $y = m_2 x + n_2$	$m_1 \neq m_2$	$m_1 = m_2$ $n_1 = n_2$	$m_1 = m_2$ $n_1 \neq n_2$
r_1: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ r_2: $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$	$\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$
Amb un sistema d'equacions	S. compatible determinat	S. compatible indeterminat	S. incompatible

Un cas especial de rectes secants són les rectes perpendiculars

- $r \perp s$ si les seves pendents compleixen $m_r = -1 / m_s$
- o si el producte escalar dels seus vectors directors és zero.

Un vector normal a una recta r: Ax+By+C=0, és el vector $\vec{v} = (A, B)$

Aplicacions

- l'angle que formen dues rectes:
  comprovem la seva posició relativa
  calculem l'angle pel producte escalar dels vectors directors si són paral·leles
- distància entre dos punts $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$
- distància d'un punt P a una recta

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- distància entre dues rectes $d(r, s) = d(P, s)$ on P és un punt de la recta