TEMA 1 : Matrius

Matriu

S' anomena matriu A a tot conjunt de nombres o expressions disposades de forma rectangular o quadrada, formant files i columnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cada nombre a_{ij} de la matriu s'anomena element, el qual es diferencia dels altres per la posició que ocupa, es a dir, la fila (i) i la columna (j) a la que pertany.
La dimensió de la matriu (m x n) ve determinada pel nombre de files (m) i el nombre de columnes (n). Si el nombre de files i columnes és igual es parla de matriu d'ordre 2, 3, …

Tipus de matrius

a) Matriu fila. Està formada per una fila.

Ex:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Matriu columna. Formada per una columna.

Ex:

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

c) Matriu rectangular. Amb diferent nombre de files que de columnes

Ex:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

d) Matriu quadrada. Té el mateix nombre de files que de columnes. Els elements de la forma a_{ii} formen la diagonal principal, i els elements amb $i + j = n + 1$ la diagonal secundària.

Ex:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

e) Matriu nul·la. Tots els elements són zeros.

Ex:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f) Matriu triangular superior. Els elements per sota de la diagonal principal són zeros.

Ex:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

g) Matriu triangular inferior. Els elements per sobre de la diagonal principal són zeros.

Ex:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

h) Matriu diagonal. Tots els termes excepte els de la diagonal principal són nuls.

Ex:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

i) Matriu escalar. Matriu diagonal on els elements de la diagonal principal són iguals.

Ex:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

j) Matriu identitat (I) o unitat. Matriu diagonal on els elements de la diagonal principal són 1.

Ex:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

k) Matriu transposada A^t. Matriu que s'obté en canviar de forma ordenada les files per les columnes de A.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

• Propietats:
a) $(A^t)^t = A$
b) $(A + B)^t = A^t + B^t$
c) $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$
d) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

l) Matriu regular. Matriu quadrada que té inversa.

m) Matriu singular. Matriu quadrada que no té inversa.

n) Matriu simètrica. Matriu quadrada que verifica $A = A^t$.

o) Matriu ortogonal. Matriu que verifica $A \cdot A^t = I$.

Operacions amb matrius

a) Suma i resta. Donades dos matrius A i B amb la mateixa dimensió

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$$

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Propietats de la suma de matrius:

a) la suma de dues matrius d'ordre mxn és altre matriu del mateix ordre
b) $A + (B + C) = (A + B) + C$
c) $A + 0 = A$, on 0 és la matriu nul·la de mateixa dimensió a A
d) $A + (- A) = 0$, on $-A$ és la matriu oposada a A amb tots els elements canviats de signe
e) $A + B = B + A$

b) Producte d'un escalar per una matriu.

$$kA = (k\, a_{ij}) \text{ per } k \in \mathbb{R}$$

Ex:

$$2\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 6 & 0 & 0\\ 10 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

• Propietats:

a) $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$, $A \in M_{mxn}$, $a, b \in \mathbb{R}$
b) $a \cdot (A+B) = a \cdot A + a \cdot B$ on $A,B \in M_{mxn}$, $a \in \mathbb{R}$
c) $(a+b) \cdot A = a \cdot A+b \cdot A$, $A \in M_{mxn}$, $a, b \in \mathbb{R}$
d) $1 \cdot A = A$, $A \in M_{mxn}$

c) Producte de dos matrius.

Dos matrius A i B es poden multiplicar ($A \cdot B$) si el nombre de columnes d' A coincideix amb el nombre de files de B.

$$M_{m\,x\,n} \cdot M_{n\,x\,p} = M_{m\,x\,p}$$

El element c_{ij} de la matriu $A{\cdot}B$ s'obté multiplicant cada element de la fila i de la matriu A per cada element de la columna j de la matriu B i sumant els resultats.

Ex:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot0\\ 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot1 & 3\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot0\\ 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 5\cdot0+1\cdot2+0\cdot1 & 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 3\\ 7 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

• Propietats:

a) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
b) $A \cdot I = A$, on I és la matriu identitat del mateix ordre que A
c) $A \cdot B \neq B \cdot A$
d) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Matriu inversa A^{-1}

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Per calcular A^{-1} resolem el sistema obtingut a partir de l'equació $A \cdot A^{-1} = I$

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 3x + 2z = 1 \\ 4x + 3z = 0 \\ 3y + 2t = 0 \\ 4y + 3t = 1 \end{matrix} \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

• Propietats:
a) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
b) $(A^{-1})^{-1} = A$
c) $(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$
d) $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$

Aplicació: resolució de problemes

Per la resolució de problemes podem seguir els següents passos:

- determinem les matrius a partir de la informació que proporciona el problema
- definim la resta de matrius com a operacions entre les matrius que hem obtingut
- efectuem les operacions necessàries

Ex: Tenim tres lingots que contenen or, plata i coure, segons una proporció en grams que s'indica en la taula següent

	Or	Plata	Coure
L_1	30	40	20
L_2	40	50	10
L_3	50	20	50

Agafem 45 g de L_1, 60 de L_2 i 48 de L_3, i formem un nou lingot. Quina quantitat d'or, plata i coure tindrà aquest nou lingot?

Fem la matriu que expressa les proporcions d'or, plata i coure que conté cada lingot

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} O & P & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{30}{90} & \frac{40}{90} & \frac{20}{90} \\ \frac{40}{100} & \frac{50}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{50}{120} & \frac{20}{120} & \frac{50}{120} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} O & P & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 4/9 & 2/9 \\ 2/5 & 1/2 & 1/10 \\ 5/12 & 1/6 & 5/12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Per trobar les quantitats dels metalls que tindrà el nou lingot hem de multiplicar la quantitat en grams que agafem de cada lingot per la proporció de metalls que hi ha a cada lingot original. Com tenim una matriu d'ordre lingots vells x quantitat de metall i volem obtenir un d'ordre nou lingot x quantitat de metall haurem de multiplicar les matrius:

$$\begin{pmatrix} 45 & 60 & 48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 4/9 & 2/9 \\ 2/5 & 1/2 & 1/10 \\ 5/12 & 1/6 & 5/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 & 58 & 36 \end{pmatrix}$$

(nou lingot x lingots vells) · (lingots vells x quantitat de metall)=nou lingot x quantitat de metall

El nou lingot tindrà 59 g d'or, 58 g de plata i 36 g de coure.

- Una aplicació en economia són les taules *input-output*. Amb aquestes taules s'expressa d'interrelació dels diferents sectors econòmics i permeten resoldre problemes com la predicció de les necessitats futures de producció, l'estudi de les relacions econòmiques, ...

  Ex: El sector agrícola d'un país produeix a l'any 200 milions d'euros; el sector industrial 300, i el sector serveis 250. El sector agrícola necessita 50 dels milions produïts per ell mateix, 40 dels produïts pel sector industrial i 30 dels produïts pel sector serveis. El sector industrial necessita 30 milions de l'agrícola, 80 del seu i 30 del sector serveis. El sector serveis necessita 20 milions del sector agrícola, 40 del sector industrial i 20 del seu sector.

  La matriu input-output aquests tres sectors : $\begin{pmatrix} 50 & 30 & 20 \\ 40 & 80 & 40 \\ 30 & 30 & 20 \end{pmatrix}$

  *La **matriu de coeficients tècnics** en la que cada a_{ij} representa el tant per u que el sector j necessita o adquireix del sector i* $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}08 \\ 0{,}20 & 0{,}26 & 0{,}16 \\ 0{,}15 & 0{,}10 & 0{,}08 \end{pmatrix}$

Ex: En un sistema econòmic el sector pesquer consumeix el 20% de la seva producció i el 30% del sector de comunicacions, mentre que aquest consumeix un 10% de la seva producció i el 20% del sector pesquer. Si la demanda exterior és de 20 milions per al sector pesquer i de 30 milions per al sector de comunicacions, quina ha de ser la producció de cada sector?.

En aquest exercici la matriu de coeficients tècnics A ens la donen directament en indicar-nos els percentatges de consum d'un sector en relació als altres

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

És possible trobar la producció X de cada sector si coneixem la demanda final D, i a l'inrevés

$$A \cdot X + D = X$$

si anomenem x *a la producció del sector pesquer i* y *a la producció del sector comunicacions*

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 0,2x + 0,2y + 20 = x \\ 0,3x + 0,1y + 30 = y \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{400}{11} \quad y = \frac{500}{11}$$

Ex: Una empresa fabrica tres productes: A, B i C. Els preus de cost de cada unitat són de 6, 9 i 14 euros respectivament. Els preus de venda d'una unitat de cada article de 18, 28 i 40 euros, i el nombre d'unitats venudes anualment de 2240, 1625 i 842 respectivament.

Observem que la matriu de costos C i la d'ingressos I ha de ser quadrada ja que fan referència a diners per unitat

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

La matriu de vendes ha de ser una matriu fila o columna ja que està referida al total

$$V = \begin{pmatrix} 2240 & 1625 & 842 \end{pmatrix}$$

La matriu d'ingressos anuals serà

$$V \cdot I$$

(nombre de vendes x *producte)· (producte* x *diners)*

$$\begin{pmatrix} 2240 & 1625 & 842 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40320 & 45500 & 33680 \end{pmatrix}$$

La matriu de despeses anuals serà

$$V \cdot C$$

(nombre de vendes x *producte)·(producte* x *diners)*

$$\begin{pmatrix} 2240 & 1625 & 842 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13440 & 14625 & 11788 \end{pmatrix}$$

Per calcular els beneficis anuals (ingressos anuals – despeses anuals)

$$\begin{pmatrix} 40320 & 45500 & 33680 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13440 & 14625 & 11788 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 268800 & 30875 & 21892 \end{pmatrix}$$

Pel producte A s'ha guanyat 268800 € en un any,
amb B s'ha guanyat 30875 € i
amb C 21892 €.

TEMA 3 : Sistemes d'equacions lineals

Equació lineal amb n incògnites

Qualsevol expressió del tipus $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_0 = 0$ on $a_i \in$ |R és una equació lineal

a_i ($a \neq 0$) – coeficient
a_0 – terme independent
x_i – incògnites

• Qualsevol conjunt de n nombres reals que verifica l'equació és solució de l'equació.
Ex: Donada l'equació $x + y + z + t = 0$ són solució (1, -1, 1, -1) i (-2, -2, 0, 4)

Sistemes d'equacions lineals

Conjunt d'expressions algebraiques de la forma

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

on x_i son las incògnites, ($i = 1,2,...,n$)
a_{ij} son los coeficients, ($i = 1,2,...,m$) ($j = 1,2,...,n$)
b_i els termes independents ($i = 1, 2, ..., m$)
$a_{ij}, b_i, m, n \in$ |N

• Quan els termes independents són zero s'anomena sistema homogeni

• Solució d'un sistema: conjunt de valors que compleix totes les equacions

• Classificació:

a) segons el nombre de solucions
   - compatible: té solució
     determinat: una única solució
     indeterminat: moltes solucions
   - incompatible: no té solució

b) esglaonats: cada equació té una incògnita menys que l'anterior

c) equivalents: tenen la mateixa solució. S'obtenen sistemes equivalents per:
   - eliminació d'equacions linealment dependents:
     tots els coeficients són zero
     dues files són iguals
     una fila és proporcional a altre
     una fila és combinació lineal d'altres

- transformacions:
  canviar l'ordre de les equacions del sistema
  canviar l'ordre de les incògnites de l'equació
  multiplicar els dos membres de l'equació per un nombre diferent a 0
  substituir una equació per una combinació lineal d'ella i la resta sempre que el coeficient de l'equació substituïda sigui diferent de 0

Mètode de Gauss

Consisteix en transformar un sistema d'equacions en altre equivalent i esglaonat que ens permetrà solucionar el sistema si és possible. Per facilitar el càlcul es transforma el sistema en una matriu.

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

Matriu A del sistema
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriu ampliada A* del sistema
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Ex:

$$\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 1\\
5x + 3y + 4z &= 2\\
x + y - z &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 5 & 3 & 4 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} f_3 \to f_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 5 & 3 & 4 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-5f_1]{f_2-3f_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 4 & \vdots & -2 \\ 0 & -2 & 9 & \vdots & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 4 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -y+4z=-2 \\ \quad z=1 \end{cases}$$

$y=4z+2=6 \qquad x=1-y+z=-4$

$x=-4 \qquad y=6 \qquad z=1$

• Si en fer Gauss s'obté una equació 0 = K amb $K\neq 0$ el sistema serà incompatible. Si s'obté 0 = 0 i el nombre d'incògnites és major al d'equacions serà compatible indeterminat.

Ex: Estudieu si hi ha cap valor de m pel qual el sistema és compatible. Si és així, resoleu el sistema.

$$\begin{cases} x+my+z=1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+y+z=m+1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & \vdots & 1 \\ m & 1 & m-1 & \vdots & m \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & m+1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-mf_1} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1-m^2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1-m & 0 & \vdots & m \end{pmatrix}$$

$$c_3 \to c_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 1-m^2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-m & \vdots & m \end{pmatrix}$$

$1-m=0 \qquad m=1$

Si $m = 1$	$0 = 1$	Sistema Incompatible

Si $m \neq 1$ Sistema Compatible Determinado

$$\begin{cases} x + z + my = 1 \\ -z + \left(1 - m^2\right)y = 0 \\ (1 - m)y = m \end{cases}$$

$$y = \frac{m}{1 - m} \qquad z = (1 + m)m \qquad x = \frac{m^3 - m^2 - 2m + 1}{1 - m}$$

- Càlcul de la matriu inversa per Gauss
  - Construir una matriu del tipus (A | I)
  - Pel mètode de Gauss es transforma la meitat A en la matriu identitat, i la matriu que queda al costat dret és la matriu inversa A^{-1}

  Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_2 - F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_3 + F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$F_2 - F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$F_1 + F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$(-1)\ F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Rang d'una matriu</u>

Nombre de files o columnes linealment independents, es a dir, que no es pot expressar una d'elles com a combinació lineal de les altres. És el nombre de files de la matriu transformada en sistema triangular diferents de zero.

Podem descartar una línea o columna si:

- tots els seus coeficients són zero
- hi ha dues línees o columnes iguals
- una línea o columna és proporcional a altre
- una línea o columna és combinació lineal de les altres

Ex:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_3 = 2F_1$

F_4 es nul·la
$F_5 = 2F_2 + F_1$

$r(A) = 2.$

En general es tracta de fer nul·les el nombre màxim de files o columnes i el rang serà el nombre de files o columnes no nul·les.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$F_2 = F_2 - 3F_1$

$F_3 = F_3 - 2F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 3$

<u>Teorema de Rouché-Frobenius</u>
Donat un sistema sigui rang A el rang de la matriu del sistema i rang A* el rang de la matriu associada al sistema

rang A = rang A* = nombre d'incògnites	S. Compatible determinat
rang A = rang A* < nombre d'incògnites	S. Compatible indeterminat
rang A < rang A*	S. Incompatible

Ex:

$$\begin{aligned} x + 3y - z &= 1 \\ 2x - 5y + 4z &= 7 \\ 3x - 2y + 3z &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 - 2E_1 \\ E_3 - 3E_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 - E_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{rang A} = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{rang A}^* = 3$$

Sistema incompatible

Ex: Discutiu segons el valor del paràmetre λ el següent sistema lineal

$$\begin{aligned} \lambda x + \ y + \ \ z &= 4 \\ x + \ y + \ 2z &= \lambda \\ x - \ y + \lambda z &= 2 \end{aligned}$$

Hem d'intentar que el primer coeficient de la primera equació no sigui el paràmetre

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad C_1 \; per \, C_2 \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & \lambda \\ -1 & 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 - E_1 \\ E_3 + E_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & \lambda - 4 \\ 0 & 1+\lambda & \lambda + 1 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ (1+\lambda)E_2-(1-\lambda)E_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & \lambda-4 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2+3\lambda-10 \end{pmatrix}$$

Si 1- λ *=0* $\longrightarrow$ λ *=1 i substituïm al sistema inicial*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} E_1 \\ E_2-E_1 \\ E_3+E_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow F_2 \text{ per } F_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

rang A = rang A = nombre d'incògnites*
3 = 3 = 3

Sistema compatible determinat

Si $\lambda^2+\lambda$ *=0* $\longrightarrow$ λ *=0* λ *=-1*

Per λ *=0*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow C_2 \, per \, C_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} E_1 \\ E_2-E_1 \\ E_3+E_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3-E_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

*rang A < rang A**
2 = 3

Sistema incompatible

Per λ *=-1*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow C_2\, per\, C_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 - E_1 \\ E_3 + E_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

*rang A < rang A**
2 = 3

Sistema incompatible