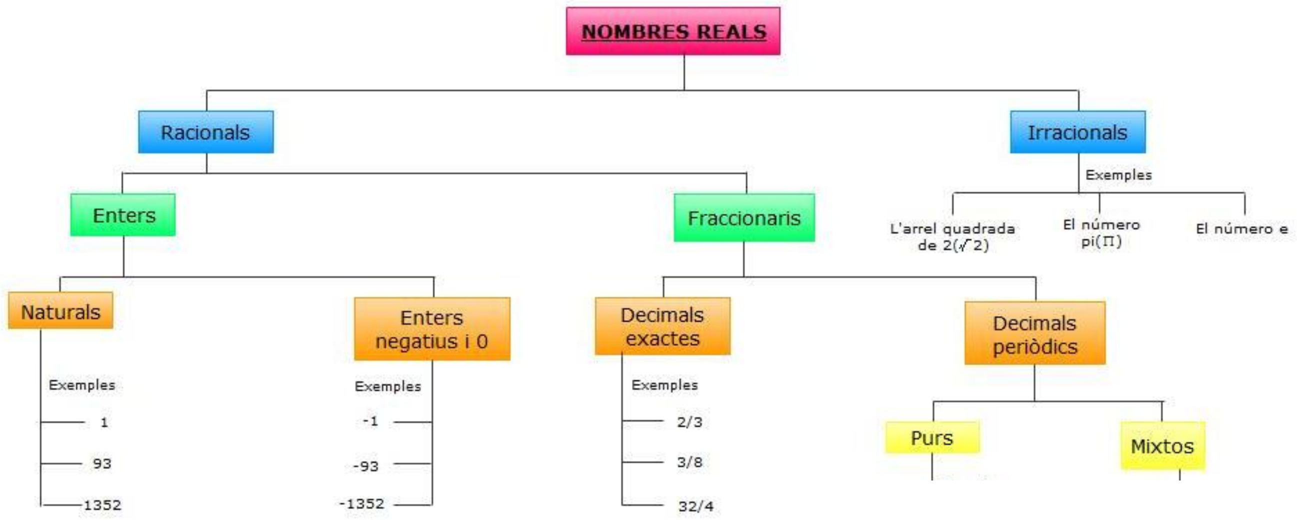
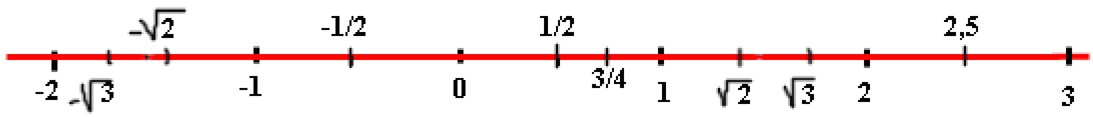
Tema 1: NOMBRES REALS



Tots ells es representen a la recta real,



Nombres racionals (Q)

$$
\textit{Nombres racionals} \quad Q \begin{cases} \textit{Enters } Z \begin{cases} \textit{Naturals} & 1, 2, 3, \ldots \\ \textit{Zero} & 0 \\ \textit{Enters negatius} & -1, -2, -3, \ldots \end{cases} \\ \textit{Fraccionaris} \begin{cases} \textit{Decimals exactes} & \frac{3}{4} = 0{,}75 \\ \textit{Decimals periòdics} \begin{cases} \textit{Purs} & -\frac{1}{3} = -0{,}\hat{3} \\ \textit{Mixtes} & \frac{59}{18} = 3{,}2\hat{7} \end{cases} \end{cases} \end{cases}
$$

Fracció generatriu
És la fracció que expressa un nombre decimal exacte o decimal periòdic

a) Nombre fraccionari → Nombre decimal.
Dividim el numerador entre el denominador. Podem obtenir tres resultats segons el residu sigui 0 o no,

Nombre decimal exacte **0,75**
residu 0

Nombre decimal periòdic
residu ≠ 0

- **pur** — **període** — **- 2, 343434.....**
- **mixte** — **període** — **58,25498498498.....** — **anteperiode**

b) Nombre decimal exacte o periòdic → Fracció generatriu

Nombre no decimal format per la part entera, i la decimal (exacte) o l'anteperiode i/o el període (periòdic)

Si el nombre que ens donen és periòdic posem el nombre format per la part entera i l'anteperiode si hi ha

$$\frac{\boxed{} - \boxed{}}{\boxed{}\,\boxed{}}$$

Un "1" si és decimal exacte
Tants "9" com xifres tingui el grup periòdic

Tants "0" com xifres tingui la part decimal no periòdica (exactes i periòdics mixtes)

Ex:

$$0{,}75 = \frac{075-0}{100} = \frac{75}{100}$$

$$-2{,}\hat{5} = -\frac{25-2}{9} = -\frac{23}{9}$$

$$48{,}54\hat{2} = \frac{48542-4854}{900} = \frac{43688}{900}$$

Nombres irracionals (|I)
Un nombre irracional és un nombre decimal que no es pot representar amb una fracció ja que no és decimal exacte ni periòdic.
Ex:

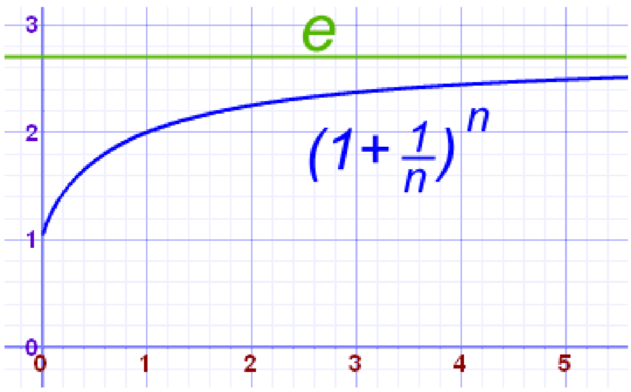
1,02002000200002....
π (nombre “pi” que relaciona la longitud i el radi d’una circumferència)
e (nombre e)
Φ (nombre auri o “phi”)

i) El nombre e, o nombre d’ Euler en honor al matemàtic Leonhard Euler (1707 – 1783), basa la seva importància en la seva participació en les funcions exponencials i en els logaritmes neperians, molt presents a la natura, economia, ciència i tecnologia.

El nombre e s’obté a través de la fórmula $(1 + 1/n)^n$

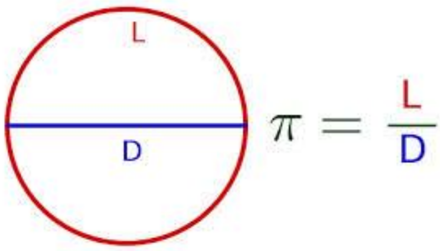
N	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2,000000000
2	2,250000000
3	2,370370370
5	2,488320000
10	2,593742460
100	2,704813829
1.000	2,716923932
10.000	2,718145927
100.000	2,718268237
1.000.000	2,718280469
10.000.000	2,718281694
100.000.000	2,718281798
1.000.000.000	2,718282052

Observem que el resultat obtingut tendeix a estabilitzar-se, ja que es van fixant les xifres en augmentar n.



Les seves primeres xifres són: 2,71828182845904523536028747135 27…

ii) El nombre π, relaciona el diàmetre de la circumferència amb la seva longitud.



Sembla que el seu nom tal i com el coneixem ara apareix per primera vegada a l'obra " Introducció a les matemàtiques" (1706) de W. Jones, per ser la inicial de la paraula perifèria (circumferència), però el coneixement d'aquest nombre i el càlcul del seu valor és molt anterior

- Egipte. Els egipcis ja coneixien la relació entre el diàmetre i la longitud de la circumferència, no es podia calcular amb exactitud i la van expressar com

3 + 1/6 o **3,16**

- Grècia. Molts segles després Arquímedes de Siracusa va dissenyar un mètode de polígons inscrits i circumscrits per calcular-lo. Així va obtenir el valor

3 + 1 / 7 o **22 / 7 = 3,1428**

Ptolomeu va calcular que π era

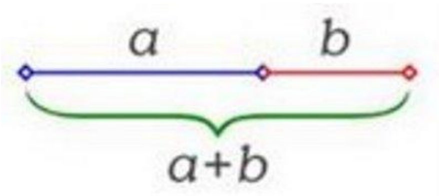
3 + 1 / 8 + 1 / 60 = 3,14166

- Matemàtics àrabs i xinesos havien trobat com valor

3,1416

- El mètode per calcular el nombre π es va mantenir fins el segle XVII, a partir d'aquest moment, els matemàtics van començar a dissenyar algoritmes en els que no intervé la circumferència, cada vegada més eficients. Entre ells es pot destacar: l'algoritme de Wallis, l'algoritme de Leibniz i l'algoritme de Euler. D'aquesta manera el nombre de decimals trobats va anar augmentant. Des de la dècada dels 40 (segle XX), amb l'aparició dels ordinadors, s'ha avançat molt de manera que en 1995 es coneixien 6 mil milions de xifres decimals.

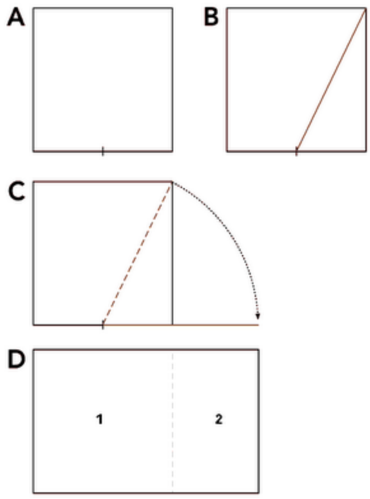
iii) Nombre φ (fi). El seu origen es troba en la proporció divina o raó aurea. Aquesta proporció va ser definida per Euclides com "divisió d'un segment en la seva mida i extrema raó", es a dir, dos segments són entre ells el que el més gran és al tot.



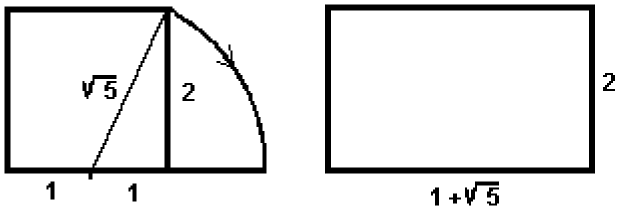
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

El resultat és un nombre anomenat nombre d'or o φ (fi) en honor a l'escultor Fidies que ho va fer servir a les seves obres.

Aquest nombre apareix en diferents formes geomètriques si bé una de les més utilitzades en l'art on apareix el nombre auri és el rectangle. Podem construir un rectangle auri a partir d'un quadrat:
- marquem el punt mitjà d'un costat i unim el punt amb un dels vèrtexs oposats;
- afegim el segment sobre el punt mitjà d'un costat del quadrat i obtenim el costat llarg del rectangle auri



Si suposem que el quadrat inicial té 2 unitats de costat, el segment que surt des del punt mig del quadrat fins un dels vèrtexs oposats val $\sqrt{5}$ (aplicació del Teorema de Pitàgores); el rectangle auri format té costats 2 i 1+ $\sqrt{5}$.



$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

φ = 1 , 6180339887....

• Per poder treballar amb els nombres irracionals cal fer arrodoniments i truncaments.

Arrodoniments i truncaments: aproximacions

Es poden aplicar a qualsevol tipus de nombre real si be resulta especialment important pels nombres decimals periòdics i els irracionals. Per treballar amb aquests nombres, com tenen infinites xifres decimals, és fa necessari fer aproximacions.

- **Arrodonir un nombre** és prendre la quantitat més propera al nombre de xifres d’un ordre determinat.

Ex: Arrodonir el nombre π (3,14159265…) a les centèssimes

3,14 *si, perquè la xifra següent a les centèssimes és inferior a 5*
~~*3,15*~~

Ex: Arrodonir 234.576 a milers

~~*234.000*~~
235.000 *si, perquè la xifra següent a les unitats de miler és igual o superior a 5*

- **Truncar un nombre** és substituir per zero les xifres d'un nombre des de una determinada posició, sense tenir en compte les de darrera. Si per exemple ens diuen que truquem a centenes posem les xifres anteriors fins a la centena (inclosa) i acabem de posar zeros.

Ex: Truncar a milèssimes el nombre π (3,14159265…)

3,141|59265… $\longrightarrow$ *3,14100000… = 3,141*

Ex: Truncar a centenes 35.384

35.3|84 $\longrightarrow$ *35.300*

Aquestes aproximacions també es produeixen en treballar amb aparells de mesura que no són prou precisos per donar-nos totes les xifres decimals o be el nombre té tantes xifres decimals que és incòmode treballar amb ell i el reduïm, l'aproximem. Tot això comporta un error.

Errors
Hi ha dos tipus: absolut i relatiu
- **Error absolut**: és la diferència, en valor absolut, del valor real x i el valor aproximat x'

$$E_x = | x - x' |$$

-**Error relatiu**: és l'error absolut dividit pel valor exacte o real

$$\varepsilon_x = \frac{E_x}{|x|}$$

Ex: 23,46987 ho volem aproximar amb dues xifres decimals

Per truncament *23,46*
Per arrodoniment *23,47 (ja que la següent xifra és 9)*

	E_x	ε_x
Truncament	$\lvert 23{,}46987 - 23{,}46 \rvert$ **0,00987**	$\frac{0{,}00987}{23{,}46987}$ = **0,000420539**
Arrodoniment	$\lvert 23{,}46987 - 23{,}47 \rvert$ **0,00013**	$\frac{0{,}00013}{23{,}46987}$ = **0,000005539**

• Acotació d'errors. Quan arrodonim un nombre fins a un ordre n cometem un error absolut que compleix

$$E_x < \frac{1}{2 \cdot 10^n}$$

mentre que l'error relatiu compleix

$$\varepsilon_x < \frac{E_x}{x - E_x}$$

Notació científica

Quan es fan servir quantitats molt grans o molt petites, és convenient utilitzar l'anomenada notació científica. Consisteix a utilitzar potències de 10, la qual cosa evita fer servir nombres amb molts zeros. En notació científica, els nombres s'expressen mitjançant una part entera, una altra de decimal i una potència de 10 amb exponent enter.

Ex:

$459 = 4{,}59 \cdot 100 = 4{,}59 \cdot 10^2$

$6.360.000 = 6{,}36 \cdot 1.000.000 = 6{,}36 \cdot 10^6$

$0{,}9 = 9 : 10 = 9 : 10^1 = 9 \cdot 10^{-1}$ ja que $10^{-1} = 1/10 = 0{,}1$

$0{,}00025 = 2{,}5 : 10.000 = 2{,}5 : 10^4 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$

Observem que la part entera ha de estar entre 1 i 9, formada per una sola xifra.

Operacions:

Ex: $2{,}3 \cdot 10^{145} + 5 \cdot 10^{143} = 2{,}3 \cdot 10^{145} + 0{,}05 \cdot 10^{145} = (2{,}3+0{,}05) \cdot 10^{145} = 2{,}35 \cdot 10^{145}$

Ex: $(3 \cdot 10^{264}) : (4 \cdot 10^{258}) = (3:4) \cdot (10^{264} : 10^{258}) = 0{,}75 \cdot 10^6 = 7{,}5 \cdot 10^5$

Potències

Propietats	Exemple
$a^0=1$	$(-2)^0 = 1$
$a^1=a$	$(-5)^1 = -5$
Operacions: 1r) fem potències i arrels; 2n) fem productes i divisions; 3r) fem sumes i restes	$3^2 + 5^2 - 2^1 = 9 + 25 - 2 = 32$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$2^5 : 2^{-3} = 2^{5-(-3)} = 2^8$
$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$
$(a : b)^m = a^m : b^m$	$(36:4)^2 = 36^2 : 4^2$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(2^3)^2 = 2^6$
$a^{-m} = 1 / a^m$ $(a/b)^{-m} = (b/a)^m$	$2^{-3} = 1 / 2^3$

ΦJΦ: $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$
$- 3^2 = - 3 \cdot 3 = - 9$

Arrels

Propietats	Exemple
Operacions: 1r) fem potències i arrels; 2n) fem productes i divisions; 3r) fem sumes i restes	$\sqrt[5]{32} + \sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{-64} =$ $= 2 + 3 \cdot (-4) =$ $= 2 - 12 = -10$
$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{8 \cdot 1000} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{1000}$ $\sqrt[3]{8000} = 2 \cdot 10$ $20 = 20$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{100} : \sqrt{25}$ $\sqrt{4} = 10 : 5$ $2 = 2$
$(\sqrt[n]{a})^b = \sqrt[n]{a^b}$	$(\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = \pm 2$
$\sqrt[n]{a^n} = a$	$\sqrt{4^2} = 4$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$

Aquesta última propietat és molt útil per multiplicar o dividir arrels amb diferent index.
Ex:

$$\sqrt[3]{5^4} \cdot \sqrt{5} = 5^{4/3} \cdot 5^{1/2} = 5^{4/3+1/2} = 5^{11/6} = \sqrt[6]{5^{11}}$$

Signe de l'arrel

Radicand \ Index	Nº parell	Nº Senar
Positiu	±	+
Negatiu	no existeix	-

Operacions amb radicals

- Treure factors fora de l'arrel

  Ex:

$$\sqrt{576} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2} = \sqrt{2^{2+2+2} \cdot 3^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} =$$
$$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

  Ex:

$$\sqrt[3]{-192} = - \sqrt[3]{2^6 \cdot 3} = - \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{3} = - 4 \cdot \sqrt[3]{3}$$

- Introduir factors dins l'arrel

  Ex:

$$3\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 5} = \sqrt[4]{81 \cdot 5} = \sqrt[4]{405}$$

  Ex:

$$2a\sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot a^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot a^2 \cdot 3} = \sqrt{12 \cdot a^2}$$

  Ex:

$$4^2 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{(4^2)^3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4^{12}} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4^{12} \cdot 5}$$

  Ex:

$$\frac{3}{2} \cdot \sqrt[5]{8} = \frac{\sqrt[5]{3^5}}{\sqrt[5]{2^5}} \cdot \sqrt[5]{8} = \frac{\sqrt[5]{3^5} \cdot \sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{3^5 \cdot 8}}{\sqrt[5]{2^5}} = \sqrt[5]{\frac{3^5 \cdot 8}{2^5}}$$

- Suma i resta de termes amb la mateixa arrel

  Ex:

  $$-5\sqrt[3]{2} + 8\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = (-5 + 8 - 1)\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$ *Traiem factor comú*

  Ex:

  $$2\sqrt{75} - \sqrt{48} + 3\sqrt{363} =$$
  $$= 2\sqrt{3\cdot 5^2} - \sqrt{2^4\cdot 3} + 3\sqrt{3\cdot 11^2} =$$
  $$= 2\cdot 5\sqrt{3} - 2\cdot 2\sqrt{3} + 3\cdot 11\sqrt{3} =$$
  $$= 10\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 33\sqrt{3} = 39\sqrt{3}$$

  Traiem tots els factors possibles fora de l'arrel

- Producte i divisió d'arrels amb diferent index

  Ex:

  $$(\sqrt[4]{2^5} : \sqrt[3]{2}) \cdot \sqrt[6]{2} =$$
  $$= (2^{\frac{5}{4}} : 2^{\frac{1}{3}}) \cdot 2^{\frac{1}{6}} =$$
  $$= 2^{\frac{11}{12}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} =$$
  $$= 2^{\frac{13}{12}} =$$
  $$= \sqrt[12]{2^{13}} = 2\sqrt[12]{2}$$

Racionalització

Consisteix en trobar una fracció equivalent a la donada però sense arrels al denominador.

a) Si no hi ha sumes o restes al denominador, multipliquem numerador i denominador per l'arrel convenient de forma que al denominador ens quedi $\sqrt[n]{a^n}$ i puguem aplicar $\sqrt[n]{a^n} = a$

   Ex:

   $$\frac{2}{\sqrt[5]{4^3}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{4^2}}{\sqrt[5]{4^3}\cdot\sqrt[5]{4^2}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{4^2}}{\sqrt[5]{4^5}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{4^2}}{4}$$

b) Si hi ha suma o resta al denominador, multipliquem numerador i denominador pel conjugat del denominador, per aplicar en aquest (a+b)(a-b) = $a^2 - b^2$

   Ex:

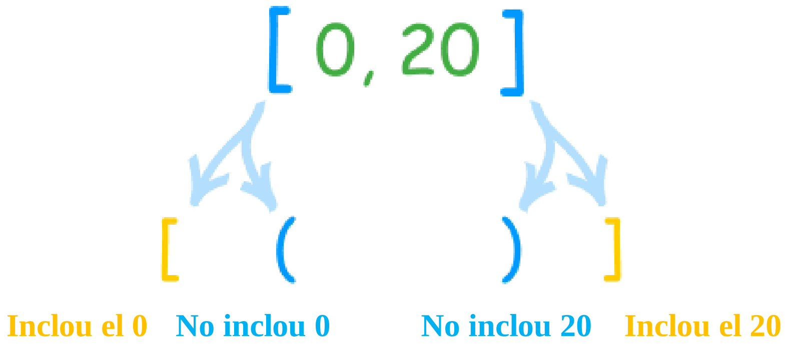
   $$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1\cdot(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

Interval de nombres reals
Un interval de nombres reals amb extrems *a* i *b* és el conjunt de nombres reals que estan compresos entre el nombre *a* i el nombre *b*.
La longitud de l'interval és | a – b |.

Ex: Si volem escriure tots els nombres entre 0 i 20 escribirem l'interval d'extrems 0 i 20

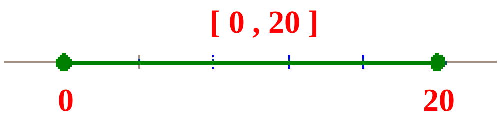
0 , 20

Però de vegades no ens interessa incloure en el grup a algún dels extrems, per indicar si s'inclouen o no els extrems al costat d'aquests escribim (o [



Així, si volem incloure el 0 i el 20 → [0 , 20]   Interval **tancat** d'extrems 0 i 20

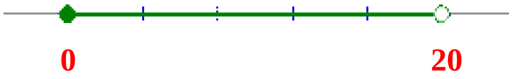
$\forall\ x\ /\ \ 0 \le x \le 20\ \ ,\ x \in [\ 0\ ,\ 20\ ]$



$\forall\ x\ /\ \ 0 < x < 20\ ,\ \ \ x \in (\ 0\ ,\ 20\ )$ Interval **obert** d'extrems 0 i 20

$\forall\ x\ /\ \ 0 \le x < 20\ ,\ \ \ x \in [\ 0\ ,\ 20\ )$ Interval **semitancat** per l'esquerra o interval **semiobert** per la dreta d'extrems 0 i 20

$\forall\ x\ /\ \ 0 < x \leq 20\ ,\quad x \in (\,0\,,20]$



Interval **semitancat** per la dreta o interval **semiobert** per l'esquerra

Semirecta
És un subconjunt de la recta real que té la propietat de que els seus punts són majors o menors que un nombre.
Poden ser obertes o tancades, positives o negatives.

Semirrecta abierta	$(a, +\infty)$	$\{x\colon a < x\}$	a
Semirrecta cerrada	$[a, +\infty)$	$\{x\colon a \leq x\}$	a
Semirrecta abierta	$(-\infty, b)$	$\{x\colon x < b\}$	b
Semirrecta cerrada	$(-\infty, b]$	$\{x\colon x \leq b\}$	b

Unió i intersecció d'intervals

a) Unió (U): Donats dos intervals reals qualssevol, la seva unió és un conjunt format per tots els elements que pertanyen al primer interval, i tots els elements que pertanyen al segon.
b) Intersecció (∩): Donats dos intervals reals qualssevol, la seva intersecció és un conjunt format per tots els elements que pertanyen a tots dos intervals.