TEMA 10. Representació de funcions

Característiques:

a) Domini:

Conjunt de valors que pot prendre la *x* (el càlcul de la fórmula és possible o és coherent amb les condicions)

Funció	**Domini**	**Hem de ….**	**Dom f**
Polinòmica	|R	-	|R
Fracció algebraica	Tots els nombres menys els que facin 0 el denominador ja que |R/0 no existeix	Solucionar l'equació denominador = 0	|R – { solucions de l'equació }
Arrel d'índex parell	Tots els nombres menys els que facin que el radicand sigui negatiu	Solucionar la inequació radicand ≥ 0	Solucions de la inequació
Arrel d'índex senar	|R	-	|R
Exponencial	Segons quin dels casos anteriors es doni a l'exponent	Veure casos anteriors	Veure casos anteriors
Logarítmica	Tots els nombres menys els que facin tenir logaritme de 0 o d'un negatiu, i els casos anteriors	Expressió > 0 o veure casos anteriors	Solucions de la inequació o veure casos anteriors

Ex:

$f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{x+3}}$

El domini ha de complir: $\dfrac{2x}{x+3} \geq 0$ *i* $x + 3 \neq 0$.

Per tal que es doni la primera condició

$2x \geq 0$	*i*	$x + 3 > 0$		
$x \geq 0$		$x > -3$	$\rightarrow$	$x \geq 0$
$2x \leq 0$	*i*	$x + 3 < 0$		
$x \leq 0$		$x < -3$	$\rightarrow$	$x < -3$

per la segona condició $x \neq -3$

$Dom = (-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$

Ex:

$g(x) = \log(x + 4)$

$x + 4 > 0$
$x > -4$
$Dom = [-4, +\infty)$

- A nivell gràfic el domini és la projecció de tots els punts del gràfic sobre l'eix x

b) Recorregut

Conjunt final o conjunt de valors que pren la *y* (resultats obtinguts en aplicar la fórmula)

Ex:

$f(x) = x^2 - 2 \quad Im = [-2, +\infty)$

- A nivell gràfic el recorregut és la projecció de tots els punts del gràfic sobre l'eix y

c) Simetria

- parella: f(x) = f(-x) (gràficament respecte l'eix y)
- senar: f(-x) = -f(x) (gràficament respecte les bisectrius o els eixos)

Ex :

$y = x^4 + 2$

$f(x) = x^4 + 2$
$f(-x) = (-x)^4 + 2 = x^4 + 2$
$-f(x) = - x^4 – 2$ *simetria parella*

d) Punts de tall amb els eixos

- amb l'eix x: y = 0
- amb l'eix y: x = 0

Ex:

$$f(x) = \frac{2x+5}{x^2}$$

punts de tall amb l'eix x: y = 0

$$\frac{2x+5}{x^2} = 0$$

$$2x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-5}{2}$$ $(\frac{-5}{2}, 0)$

punts de tall amb l'eix y: x = 0

$$y = 2 \cdot 0 + \frac{5}{0^2} \qquad y = \frac{5}{0}$$

no hi ha

• Com a màxim hi ha un punt de tall amb l'eix y

e) Continuïtat

Una funció f(x) és contínua en un punt x=c si:

a) $\exists \lim_{x \to c} f(x)$
b) $\exists$ f(c)
c) $\lim_{x \to c} f(x)$ = f(c)

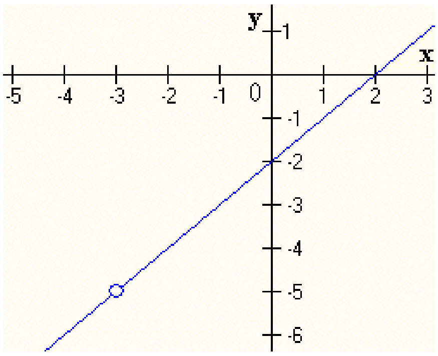
• Una funció és contínua si ho és en tots els punts del seu domini. En cas contrari la funció és discontínua.

• Els punts que no pertanyen al domini no tenen imatge i són punts de discontinuïtat.

Tipus de discontinuïtat:

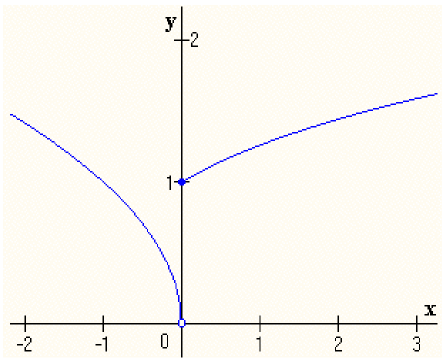
i) *Evitable*. Si $\exists \lim_{x \to c} f(x)$ però $\lim_{x \to c} f(x) \neq$ f(c), per què no existeix la imatge o aquesta no coincideix amb el límit.

Ex:



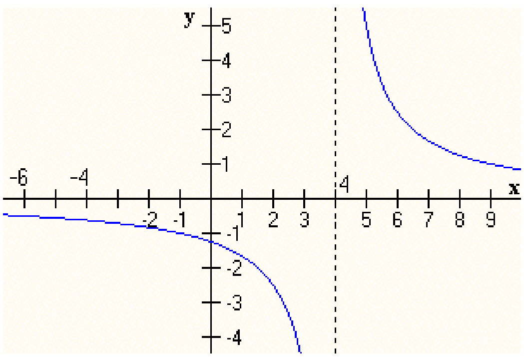
ii) *De salt*. Si $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$.

Ex:



iii) *Asimptòtica*. Els límits laterals tendeixen a $\pm\infty$.

Ex:



• Tipus d'asímptotes:

- verticals x = K (recta paral·lela a l'eix d'ordenades)
- horitzontals y = k (recta paral·lela a l'eix d'abscisses)
- obliqües y = mx + n (recta amb pendent m)

1. *Asímptotes verticals*:
   En x = c hi ha una asímptota vertical si $\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ i $\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$.

   Ex: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$

   Dom f = |R – { 3 }, això implica que no hi ha imatge per x=3 i que la funció és discontinua per aquest valor.
   Quin tipus de discontinuïtat? Com

   $$\lim_{x\to 3^+} \frac{x+1}{x-3} = +\infty \qquad i \qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{x+1}{x-3} = -\infty$$

   podem dir que hi ha una discontinuïtat asimptòtica, es a dir, una asímptota vertical en x = 3.

2. *Asímptotes horitzontals:*
   En y = k hi ha una asímptota horitzontal si $\lim_{x\to +\infty} f(x) = k$ i /o $\lim_{x\to -\infty} f(x) = k$.

   Ex: $y = \dfrac{2}{x^2 - 1}$

   $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

   Hi ha una asímptota horitzontal en y = 0.

3. *Asímptota obliqua:*
   En y = mx +n hi ha una asímptota obliqua si existeixen els límits per $\pm\infty$:

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$
   $$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = n$$

Ex: $y = \dfrac{2x^2 - x}{3x}$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x}{3x} - \frac{2}{3}x = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{9x} = \frac{-1}{9}$$

Hi ha una asímptota obliqua en $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{9}$

f) Creixement i decreixement. Màxims i Mínims

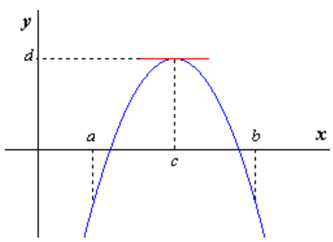
- Direm que una funció f(x) és *creixent* en (a,b) si $\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)\ /\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Si $f(x_1)<f(x_2)$ direm que la funció és *estrictament creixent.*
  Observem que en un interval creixent les rectes tangents al gràfic de f(x) seran creixents, es a dir, amb pendent positiu. Una funció f(x) derivable en (a,b) és creixent en aquest interval si $f'(x)>0\ \forall\ x \in (a,b)$.

- Direm que una funció f(x) és *decreixent* en (a,b) si $\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)\ /\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. Si $f(x_1)>f(x_2)$ direm que la funció és *estrictament decreixent.*
  Una funció f(x) derivable en (a,b) és decreixent en aquest interval si $f'(x)<0\ \forall\ x \in (a,b)$.

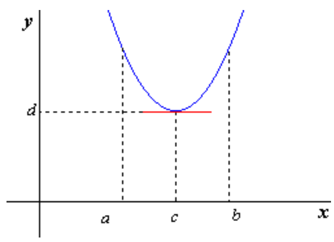
- Direm que una funció f(x) és constant en (a,b) si $\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)\ /\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

- Direm que en x = c f(x) assoleix un *màxim relatiu* quan just en aquest valor la funció passa de creixent a decreixent.
  Direm que en x = c f(x) assoleix un *mínim relatiu* quan just en aquest valor la funció passa de decreixent a creixent.

Gràficament



en c de creixent a decreixent



en c de decreixent a creixent

Els màxims i mínims relatius s'anomenen *extrems relatius* de la funció.

Observem que en tots dos casos la recta tangent a la corba és horitzontal el que implica un pendent igual a 0, no són però casos únics: en els punts d'inflexió la tangent és també horitzontal.

> f(x) presenta un extrem relatiu en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.
> $f'(x_0) = 0$ no implica que x_0 sigui un màxim o un mínim ja que pot ser un punt d'inflexió.

Per trobar els extrems relatius haurem d'estudiar si canvia el signe de la derivada a tots dos costats d'aquells punts que presenten valor de derivada primera igual a 0.

Els punts on la tangent és horitzontal , es a dir, aquells on $f'(x) = 0$ s'anomenen *punts singulars* o *punts crítics.*

Ex: Donada la funció $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ estudia els intervals de creixement i decreixement. Determineu els extrems relatius.

Per estudiar el creixement i decreixement de la funció cal veure en quins punts la derivada primera s'anul·la

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \qquad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Rightarrow x = 3 \quad i \quad x = -1$$

Aquests resultats divideixen el domini en intervals.
Cal veure en quins intervals la derivada de la funció és positiva (funció creixent) i en quins és negativa (funció decreixent), per això agafem un punt qualsevol de l'interval i el substituïm a la fórmula de f'(x)

$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f'(x)	+		-		+	
f(x)	*creixent*		*decreixent*		*creixent*	

si agafem qualsevol nombre de $(-\infty,-1)$, *per exemple el -2, observem que el valor de la derivada primera és positiu:* $f'(-2) = 12+12-9>0$; *si fem el mateix amb els altres intervals*

> $f'(0)= -9 <0$
> $f'(4)= 48+24-9>0$

es verifiquen els intervals de creixement i decreixement anteriors

f(x) és creixent en $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$
f(x) és decreixent en $(-1,3)$

Com $\quad Dom\, f = |R$ *i és una funció continua (polinòmica)*
(-1,0) és un màxim relatiu
(3,-22) és un mínim relatiu

IMPORTANT!!!. Quan estudiem els intervals de creixement i decreixement no només hem de definir-los amb els punts on la derivada primera és 0, si no també amb aquells que no pertanyen al domini o els que el defineixen.

Ex: $\quad f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

Dom f = /R – { 1 }

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \qquad f'(x) = 0 \text{ si } x=0 \text{ o } x=2$$

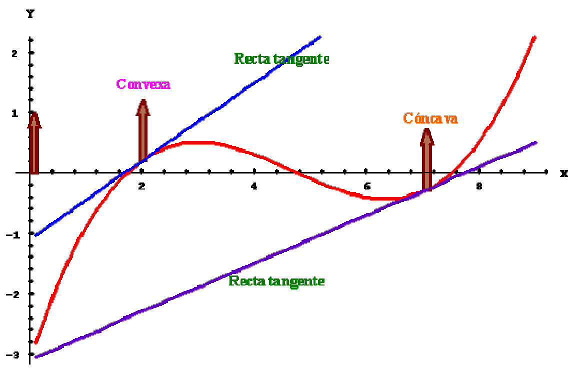
	$-\infty$ ___ 0	0 ___ 1	1 ___ 2	2 ___ $+\infty$
f'(x)	+	-	+	-
f(x)	*creixent*	*decreixent*	*creixent*	*decreixent*

f(x) és creixent: $(-\infty,0)\cup(1,2)$
f(x)és decreixent: $(0,1)\cup(2,+\infty)$

Màxim: (0,0) i (2,4). En x=1 no hi ha màxim ni mínim ja que no pertany al domini.

g) Concavitat i convexitat. Punts d'inflexió.

Gràficament:

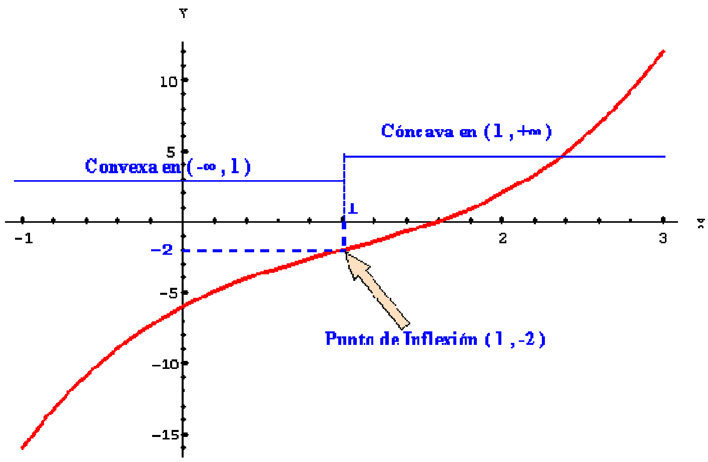


- Una funció es *còncava* en un interval (a,b) si totes les tangents a la gràfica en aquest interval queden per sota de la gràfica.

  Si estudiem les rectes tangents a la corba observem que l'interval de concavitat tenim (d'esquerra a dreta) en principi rectes decreixents cada vegada amb un pendent de valor absolut menor, fins que arriba a un punt on la recta tangent és horitzontal i, des d'aquest, comencen a ser creixents cada vegada amb major pendent. Si en valor dels pendents (f'(x)) els representem gràficament obtindrem una funció creixent que passa de valors negatius a positius; en derivar la funció obtinguda, es a dir, en calcular f''(x), com aquesta és creixent, obtindrem valors positius.
  Si $f''(x)>0$ en (a,b) $\Rightarrow$ f(x) és còncava en (a,b).

- Una funció es *convexa* en un interval (a,b) si totes les tangents a la gràfica en aquest interval queden per sobre de la gràfica.

  Si $f''(x)>0$ en (a,b) $\Rightarrow$ f(x) és còncava en (a,b).
- El punt en que la gràfica d'una funció passa de ser còncava a convexa o al contrari s'anomena <u>punt d'inflexió</u>. En aquest punt la tangent travessa la gràfica.



Siguin f(x) i f'(x) derivables en x_0 i x_0 és un punt d'inflexió $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$
$f'''(x_0) \neq 0$

Ex: Estudieu la curvatura de la funció $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 5$.

$Dom\, f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2$

$f''(x) = 36x^2 - 48x \qquad f''(x)=0 \text{ si } \quad 12x\cdot(3x-4)=0 \qquad x=0 \text{ o } x=\frac{4}{3}$

Aquests valors defineixen uns intervals on, de forma semblant al cas del creixement i decreixement, hem d'estudiar el signe de la derivada segona

	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
f''(x)		+		-		+	
f(x)		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

Concavitat: $(-\infty,0)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$

Convexitat: $\left(0,\frac{4}{3}\right)$

Punts d'inflexió: (0,5) i $(\frac{4}{3},\ \ )$

Representació gràfica de funcions

Amb l'estudi de totes les característiques anteriors podrem representar gràficament una funció.

Ex: $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

i) Domini

$x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \qquad x = \sqrt{1} = \pm 1$

Dom f = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

ii) Punts de tall

amb l'eix x $\rightarrow y = 0$ $\qquad \dfrac{x+1}{x^2-1}=0$

$x + 1 = 0$

$x = -1$ *però com x = -1 no pertany al domini el punt (-1, 0) no pertany a la funció*

amb l'eix y $\rightarrow x = 0$ $\qquad y=\dfrac{0+1}{0^2-1}=-1$ *(0, -1)* *iii) Simetria*

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$f(-x) = \frac{-x+1}{(-x)^2-1} = \frac{-x+1}{x^2-1}$$

$$-f(x) = \frac{-x-1}{x^2-1}$$

No hi ha

iv) Continuïtat i asímptotes

■ *Punts de discontinuïtat* *Dom f = /R – { -1, 1 }*

x = -1

$$f(-1) = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

Discontinuïtat evitable en (-1, $-\frac{1}{2}$*)*

x = 1

$f(1) = \frac{2}{0}$ *Com això donaria* ∞ *per fer la gràfica cal fer límit a la dreta i límit a l'esquerra*

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x^2-1} = +\infty$$ *(pensem quin signe donaria amb x=1,01)*

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x^2-1} = -\infty$$ *(pensem quin signe donaria amb x=0,99)*

Asímptota vertical en x = 1

■ *Asímptota horitzontal*

$$x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = 0$$

$$x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = 0$$

■ *Asímptota obliqua: no hi ha perquè hi ha asímptota horitzontal*

v) Creixement / Decreixement

Possibles extrems relatius $f'(x)=0$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-1)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-2x-1}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x) = 0$

$-x^2 - 2x - 1 = 0 \qquad x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-1)}}{2\cdot(-1)} = -1$

Com x = -1 no pertany al domini no és un extrem relatiu

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-		-		-	
$f(x)$		*decreixent*		*decreixent*		*decreixent*	
			Discontinuïtat evitable		*Asímptota vertical*		

vi) Concavitat / convexitat

Possibles punts d'inflexió $f''(x)=0$

$$f'(x) = \frac{-x^2-2x-1}{(x^2-1)^2} = \frac{-(x+1)^2}{(x^2-1)(x^2-1)} = \frac{-(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

$f''(x) = 0$

$\dfrac{2}{(x-1)^3} = 0$ $\qquad$ *2 = 0 !!!* $\qquad$ *No hi ha punts d'inflexió*

	$-\infty$ ———	-1	———	1	——— $+\infty$
f''(x)	-		-		+
f(x)	*còncava*		*còncava*		*convexa*
		Discontinuïtat evitable		*Asímptota vertical*	

vii) Gràfic

Funcions elementals

a)Funcions polinòmiques

Funcions polinòmiques de grau 0

Tipus	Fórmula	Gràfic	Pendent	Punts de tall	Exemple
Constant	y = b	Recta horitzontal	0	(nº , b)	y = 2 recta horitzontal que passa per (0,2) i (1,2)

Funcions polinòmiques de 1r grau

Tipus	Fórmula	Gràfic	Pendent	Punts de tall	Exemple
Afí	y = ax + b	Recta obliqua creixent si a > 0 decreixent si a < 0	a	(0 , b) $(\frac{-b}{a}, 0)$	y = 3x + 2 recta creixent que passa per (0,2) i $(\frac{-2}{3},0)$
Lineal	y = ax			(0 , 0) (1 , a)	y = -x recta decreixent que passa per (0,0) i (1,-1)

• El pendent indica el grau d'inclinació de la recta, quant més gran és el seu valor absolut més vertical és.

Funció polinòmica de 2n grau

Tipus	Fórmula	Gràfic	Vèrtex	Exemple
Completa	$y = ax^2 + bx + c$	Paràbola còncava si a > 0 convexa si a < 0	$(\frac{-b}{2a}, \ldots)$	$f(x) = x^2 - 2x + 1$ paràbola còncava (a = 1) amb vèrtex a (1 , 0)
Incompleta	$y = ax^2 + bx$ $y = ax^2 + c$			$y = -2x^2 + 5$ paràbola convexa (a = - 2) amb vèrtex a (0, 5)

b) <u>Funció de proporcionalitat inversa</u>

Fórmula	Gràfic	Exemple
$y = \dfrac{k}{x}$ amb $k \in \mathbb{R}$	Hipèrbole a 1r i 3r quadrant si k>0 Decreixent a 2n i 4t quadrant si k<0 Creixent	$y = \dfrac{2}{x}$ hipèrbole decreixent

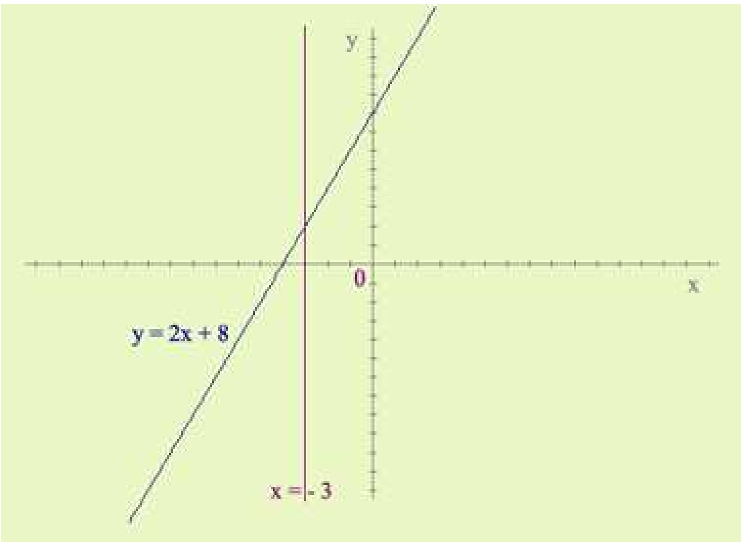
c) <u>Funcions definides a trossos</u>

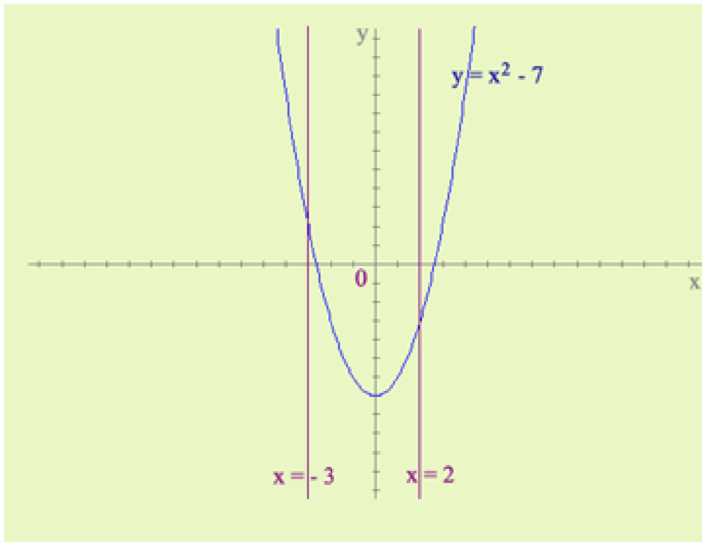
Són funcions on la fórmula varia segons els intervals del domini.

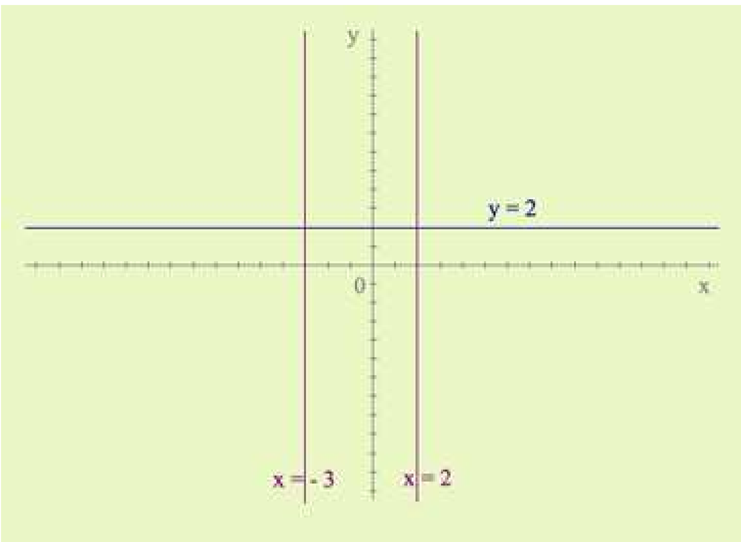
Ex:

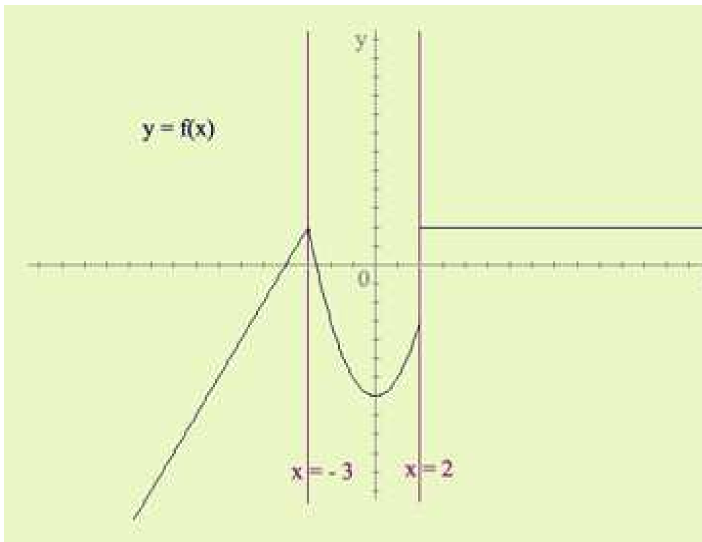
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 8 & \text{si} \quad x < -3 \\ x^2 - 7 & \text{si} \quad -3 \le x \le 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$$

Es tracta de dibuixar cada funció i després mantenir el gràfic en l'interval corresponent





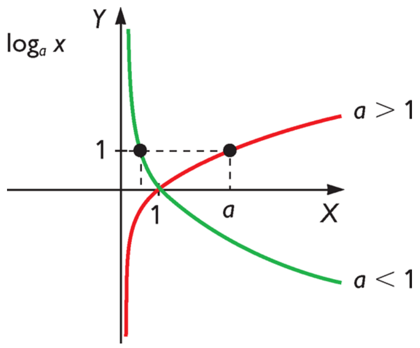




• El domini d'aquestes funcions bé expressat per la unió dels dominis dels diferents trossos.

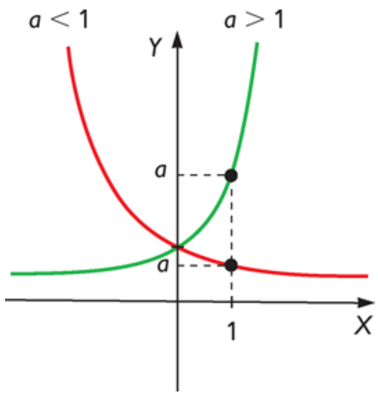
d) <u>Funcions logarítmiques</u> $f(x) = \log_a x$ per $a > 0$

a>1	**Característiques**	**0<a<1**
$(0,+\infty)$	Domini	$(0,+\infty)$
$\mathbb{R}$	Recorregut	$\mathbb{R}$
(1,0)	Punts de tall	(1,0)
No hi ha	Simetria	No hi ha
Si	Continuïtat	Si
Creixent	Creixement/Decreixement	Decreixent



e) <u>Funcions exponencials</u> $f(x) = a^x$ per $a > 0$

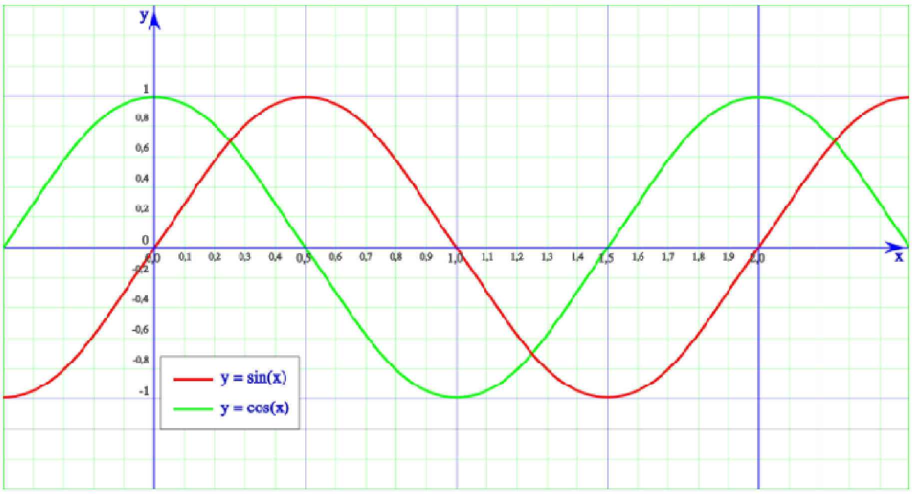
a>1	**Característiques**	**0<a<1**
$\mathbb{R}$	Domini	$\mathbb{R}$
$(0,+\infty)$	Recorregut	$(0,+\infty)$
(0,1)	Punts de tall	(0,1)
No hi ha	Simetria	No hi ha
Si	Continuïtat	Si
Creixent	Creixement/Decreixement	Decreixent



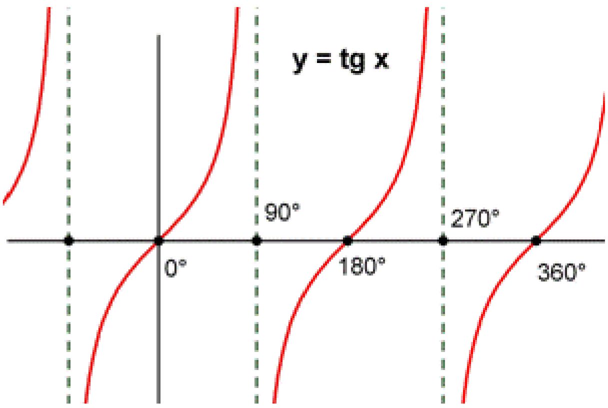
j) <u>Funcions trigonomètriques</u>

Són funcions periòdiques, es a dir, es repeteix el gràfic cada interval del domini.

	y=sinx	**y=cosx**
Domini	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Recorregut	[-1, 1]	[-1 , 1]
Punts de tall	$(k\pi,0)$ $(0,0)$	$(\frac{\pi}{2}+k\pi,0)$ $(0,1)$
Simetria	senar	Parella
Continuïtat	continua	Continua
Extrems relatius	$M=(\frac{\pi}{2}+k2\pi,1)$ $m=(\frac{3\pi}{2}+k2\pi,-1)$	$M=(k2\pi,1)$ $m=(\pi+k2\pi,-1)$
Periodicitat	$T=2\pi$	$T=2\pi$



No totes les funcions trigonomètriques són continues. Ex: f(x) = tan x



k) <u>Funció valor absolut</u>

La variable es troba en un valor absolut

Ex:

f(x) = | x + 1 |

• Hem de transformar aquestes funcions en funcions definides a trossos per poder treballar. Els intervals venen definits per aquells valors on l'expressió de dins el valor absolut és igual a 0.

Ex: *f(x) = | x |*

x = 0

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

ja que, per exemple, per x = - 2 f(-2) = |-2| = - (-2) = 2

Ex: *f(x) = | x + 2 |*

x + 2 = 0
x = - 2

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2) & x < -2 \\ x+2 & x \geq 2 \end{cases}$$

Ex: *f(x) = | x – 3 | + | x + 1 |*

x – 3 = 0   x = 3
x + 1 = 0   x = - 1

$$f(x) = \begin{cases} -(x-3)-(x+1) & x < -1 \\ -(x-3)+(x+1) & -1 \leq x \leq 3 \\ (x-3)+(x+1) & 3 < x \end{cases}$$