TEMA 10 : GEOMETRIA A L'ESPAI. PROBLEMES MÈTRICS

Angle entre dues rectes

L'angle que formen dues rectes correspon a l'angle agut determinat pels vectors directors de les rectes.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\alpha(r,s) = \alpha(\vec{u}, \vec{v}) = \text{arc cos}\frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

• Dues rectes són perpendiculars si els vectors directors són ortogonals

$$r \perp s \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \qquad u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 0$$

Ex: Trobeu l'angle que formen les rectes

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1} \qquad s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

$$\vec{u} = (2,1,1) \qquad \vec{v} = (-1,2,1)$$

$$\alpha(r,s) = \alpha(\vec{u}, \vec{v}) = \text{arc cos}\frac{|2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{6}$$

$$(\widehat{r,s}) = \text{arc cos}\frac{1}{6} = 80.41°$$

Angle entre dos plans

Un angle entre dos plans és l'angle agut determinat pels vectors normals als plans

$$\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1) \qquad \vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\alpha(\pi_1, \pi_2) = \alpha(\vec{n_1}, \vec{n_2}) = \text{arc cos}\frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

• Dos plans són perpendiculars si els vectors directors són ortogonals

$$\pi_1 \perp \pi_2 \qquad \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \qquad A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$$

Ex: Trobeu l'angle que formen els plans

$$\pi_1 \equiv 2x - y + z - 1 = 0 \qquad \pi_2 \equiv x + z + 3 = 0$$

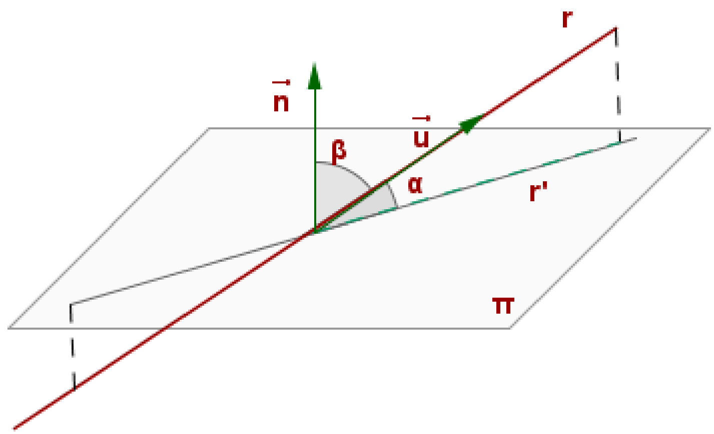
$$\vec{n_1} = (2, -1, 1) \qquad \vec{n_2} = (1, 0, 1)$$

$$\alpha(\pi_1, \pi_2) = \alpha(\vec{n_1}, \vec{n_2}) = \text{arc cos} \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}$$

$$(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = \text{arc cos} \frac{\sqrt{3}}{2} = 30^\circ$$

<u>Angle entre recta i pla</u>

L'angle entre recta r i plá π és el que forma la recta amb la seva projecció al pla. És complementari del que forma la recta amb la direcció normal al pla.



$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \qquad \vec{n} = (A, B, C)$$

$$sen\, \alpha = cos\, \beta = cos\,(\vec{n}, \vec{u}) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}$$

$$\alpha = \text{arc sen}\,\frac{|A\cdot u_1 + B\cdot u_2 + C\cdot u_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2}}$$

• Si la recta i el pla són perpendiculars, el vector director de la recta i el vector normal del pla tenen la mateixa direcció i, en conseqüència, les seves components són proporcionals

$$\frac{u_1}{A} = \frac{u_2}{B} = \frac{u_3}{C}$$

Ex: Determineu l'angle que forma la recta r i el pla π

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

$$\pi \equiv x + y - 1 = 0$$

$$\vec{u} = (2,1,2) \qquad \vec{n} = (1,1,0)$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{|2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{3}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}}$$

Ex: Trobeu l'angle que formen la recta i el pla

$$r \equiv \begin{cases} x + 3y - z + 3 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\pi \equiv 2x - y + 3z + 1 = 0$$

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}$$

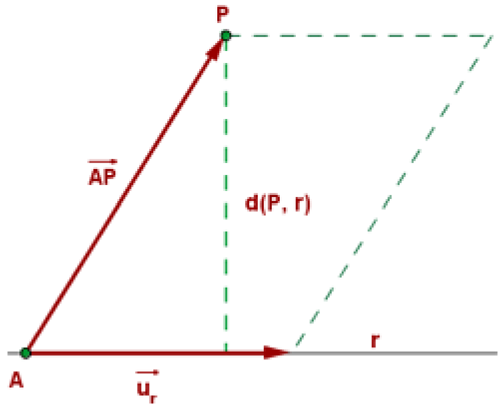
$$\vec{u} = (-4,-1,-7) \qquad \vec{n} = (2,-1,3)$$

$$sen\,\alpha = \frac{\left|-4\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+(-7)\cdot 3\right|}{\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+(-7)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}} = \frac{28}{\sqrt{66}\cdot\sqrt{14}}$$

$$\alpha = arc\ sen\frac{14}{\sqrt{231}} = 22.91°$$

<u>Distància entre un punt i una recta</u>

La distància d'un punt P a una recta r és la menor distància des del punt a qualsevol dels punts de la recta.



$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{u}_r\ x\ \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\vec{u}_r\right|}$$

Ex: Trobeu la distància des del punt P = (1, 3, -2) i la recta r

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 1-2\lambda \end{cases}.$$

$$\overrightarrow{AP} = (1-2, 3+1, -2-1) = (-1, 4, -3) \qquad \vec{u}_r = (3, 1, -2)$$

$$\vec{u}_r\ x\ \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 11\vec{j} + 13\vec{k}$$

$$\left|\vec{u}_r\ x\ \overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{5^2+11^2+13^2} = 3\sqrt{35} \qquad \left|\vec{u}_r\right| = \sqrt{3^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{14}$$

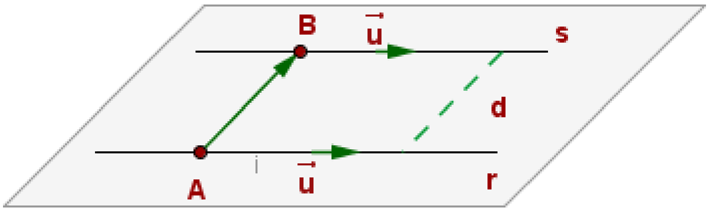
$$d(P,r) = \frac{3\sqrt{35}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

Distància entre rectes

Cal determinar la posició relativa de les dues rectes

a) Secants. La distància és 0.

b) Paral·leles. La distància entre dues rectes paral·leles r i s és la distància des d'un punt qualsevol de r a s.



$$d(r,s) = d(A,s) = \frac{|\vec{u} \, x \, \overrightarrow{AB}|}{|\vec{u}|}$$

c) S'encreuen. Els vectors $\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}$ determinen un paralepípede que tenen per altura la distància entre les rectes.

$$\left.\begin{array}{l} V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right| \\ A_{base} = |\vec{u} \times \vec{v}| \end{array}\right\} d(r,s) = \frac{V}{A_{base}} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Ex: Trobeu la distància entre les rectes

$$r \equiv \frac{x+8}{2} = \frac{y-10}{3} = \frac{z-6}{1} \qquad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$$

$A(-8,10,6) \qquad \vec{u} = (2,3,1)$

$\overrightarrow{AB} = (9,-9,-5)$

$B(1,1,1) \qquad \vec{v} = (-1,2,4)$

$$V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\left\|\begin{matrix}9 & -9 & -5\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 4\end{matrix}\right\|=136$$

$$\vec{u}\,x\,\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 4\end{vmatrix}=10\vec{i}-9\vec{j}+7\vec{k}$$

$$A_b=\left|\vec{u}\,x\,\vec{v}\right|=\sqrt{10^2-9^2+7^2}=\sqrt{230}$$

$$h=\frac{136}{\sqrt{230}}=\frac{68\sqrt{230}}{115}$$

Distància d'un punt a un pla

És el mòdul del segment perpendicular al pla que té per extrem el punt P

$$P(x_0,y_0,z_0) \qquad \pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$$

$$d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Ex: Trobeu la distància des del punt P = (3, 1, -2) als plans

π_1 : 2x + y – z + 1 = 0

π_2 : 2y – 3 = 0

$$d(P,\pi_1)=\frac{|2\cdot3+1\cdot1-1\cdot(-2)+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{6}}$$

$$d(P,\pi_1)=\frac{|2\cdot1-3|}{\sqrt{0^2+2^2+0^2}}=\frac{1}{2}$$

Distància entre els plans paral·lels

És la distància d'un punt d'un dels plans a l'altre pla.

Es pot calcular també amb la fórmula,

$$\pi_1\equiv Ax+By+Cz+D_1=0 \qquad \pi_2\equiv Ax+By+Cz+D_2=0$$

$$d\left(\pi_1, \pi_2\right) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ex: Calculeu la distància entre els plans

π_1 : 2x - y – 2z + 5 = 0
π_2 : 4x - 2y – 4z + 15 = 0

Com

$$\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{5}{15}$$

els plans són paral·lels

$$\pi_2 \equiv 2x - y - 2z + \frac{15}{2} = 0$$

$$d\left(\pi_1, \pi_2\right) = \frac{\left|\frac{15}{2} - 5\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{6}$$