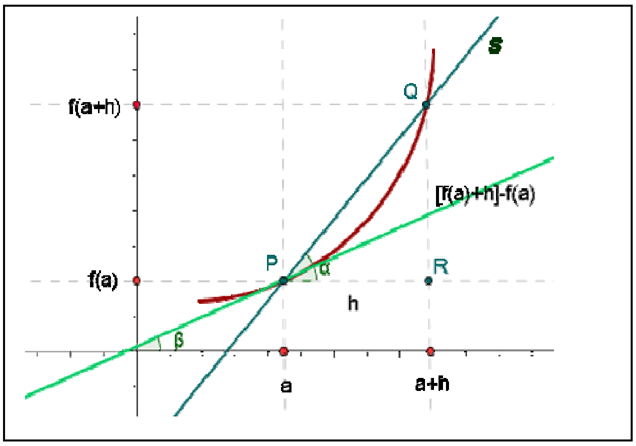
TEMA 1 : Derivades

Derivada d'una funció en un punt

El límit, $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, si existeix i és finit s'anomena *derivada de la funció f en el punt $x_0 = a$* i es designa per f'(a).

- Gràficament f'(a) significa el pendent de la recta tangent a la gràfica de f(x) en el punt d'abscisses $x_0 = a$



f'(a) = tg α

- Si existeix f'(a) es diu que f és *derivable en $x_0 = a$*

Ex: Si f(x) = x^2 trobeu la derivada en $x_0 = 1$

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}}=2$$

llavors f'(1) = 2

Derivades laterals d'una funció en un punt

- S'anomena *derivada per l'esquerra* de f en el punt x_0 = a i es designa per $f_-^{'}(a)$:
$$f_-^{'}(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
- S'anomena *derivada per la dreta* de f en el punt x_0 = a i es designa per $f_+^{'}(a)$:
$$f_+^{'}(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
- f és derivable en el punt x_0 = a ⇔ $f_-^{'}(a) = f_+^{'}(a)$

Funció derivada

- Si una funció f és derivable en tots els punts d’un interval I = (a,b), la funció:

$$f': x \longrightarrow f'(x)$$ s’anomena *funció derivada de f*

- Si f’ és derivable, la seva derivada f’’ s’anomena segona derivada de f, i així successivament, es defineixen f’’’, f^{IV}, ..., $f^{(n)}$ (derivada tercera, quarta,.... n-èssima)

Ex: Donada la funció $f(x) = 5x - x^2$,

$$\bullet\; f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)-(x+h)^2-(5x-x^2)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{5x+5h-x^2-2xh-h^2-5x+x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2xh+5h}{\cancel{h}} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-h^2-2x+5)}{\cancel{h}} = -2x+5 \quad\rightarrow\quad f'(x) = -2x+5$$

$$\bullet\; f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2(x+h)+5-(-2x+5)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-2x-2h+5+2x-5}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2h}{\cancel{h}} = -2 \quad\rightarrow\quad f''(x) = -2$$

$$\bullet\; f'''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2+2}{h} = 0 \quad\rightarrow\quad f'''(x) = 0$$

$$\bullet\; f^{IV} = ... = f^{(n)} = 0$$

Regles de derivació

Operacions amb derivades

Funció	**Derivada**
Producte per un nombre	
$y = k \cdot u$	$y' = k \cdot u'$
Suma i resta	
$y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$
Producte	
$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Quocient	
$y = \dfrac{u}{v}$	$y = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
Composició. Regla de la cadena	
$y = u\,(v\,(x))$	$y' = u'\,(v\,(x)) \cdot v'(x)$

a) Derivada de les funcions elementals

TAULA DE DERIVADES

Funció	**Derivada**	**Exemples**		**Exemples**	
Constant					
$y = k$	$y'=0$	$y = 8$	$y' = 0$		
Identitat					
$y = x$	$y' = 1$	$y = x$	$y'=1$		
Funcions potencials					
$y = x^m$	$y' = m \cdot x^{m-1}$	$y = x^5$	$y' = 5x^4$	$y = \left(2x^2+1\right)^3$	$y' = 3 \cdot \left(2x^2+1\right)^2 \cdot 4x$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{5x}$	$y' = \frac{5}{2\sqrt{5x}}$
$y = \sqrt[m]{x}$	$y' = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$	$y = \sqrt[5]{x}$	$y' = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$	$y = \sqrt[5]{3x^2}$	$y' = \frac{6x}{5 \cdot \sqrt[5]{\left(3x^2\right)^4}}$
Funcions exponencials					
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{3x^2+1}$	$y' = 6xe^{3x^2+1}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = 3^x$	$y' = 3^x \cdot \ln 3$	$y = 5^{3x-4}$	$y' = 3 \cdot 5^{3x-4} \cdot \ln 5$
Funcions logarítmiques					
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln\left(x^2+7x\right)$	$y' = \frac{2x+7}{x^2+7x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$y = \log_2(5x+7)$	$y' = \frac{5}{(5x+7) \cdot \ln 5}$
Funcions trigonomètriques					
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin 5x$	$y' = 5 \cdot \cos 5x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos 3x^2$	$y = -6x \cdot \sin 3x^2$
$y = tgx$	$y' = 1 + tg^2 x$ $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = tgx$	$y' = 1 + tg^2 x$ $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = tg\,7x$	$y' = (1 + tg^2(7x)) \cdot 7$ $y' = \frac{7}{\cos^2(7x)}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x^2$	$y' = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos 3x$	$y' = \frac{-3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$
$y = arctg\,x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = arctg\,x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = arctg\ 3x$	$y' = \frac{3}{1+(3x)^2}$

b) Derivada de funcions del tipus $y = u^v$

Per trobar la derivada d'un funció del tipus $y = u^v$, cal prendre logarítme a totes dues bandes de la igualtat:

$$y = u^v$$

$$\ln y = \ln u^v$$

$$\ln y = v \cdot \ln u$$

Derivem

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \rightarrow \quad y' = \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) \cdot y$$

Ex: Trobeu la derivada de $y = \left(3x^2 - 5\right)^{\sin x}$

$$y = \left(3x^2 - 5\right)^{\sin x}$$
$$\ln y = \ln\left(3x^2 - 5\right)^{\sin x}$$
$$\ln y = \sin x \cdot \ln\left(3x^2 - 5\right)$$
$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(3x^2 - 5) + \sin x \cdot \frac{6x}{(3x^2 - 5)}$$
$$y' = \left(\cos x \cdot \ln(3x^2 - 5) + \sin x \cdot \frac{6x}{(3x^2 - 5)} \right) \cdot y$$
$$y' = \left(\cos x \cdot \ln(3x^2 - 5) + \sin x \cdot \frac{6x}{(3x^2 - 5)} \right) \cdot \left(3x^2 - 5\right)^{\sin x}$$

c) Derivada de una funció implícita

Una *funció* s'anomena *implícita* quan està definida de la forma F(x,y) = 0 en lloc de la forma habitual (y = f(x))
Per poder derivar una funció implícita només cal fer servir la regla de la cadena, i tenir present que en el cas de la variable independent (x) es deriva directament i pel que fa a la variable dependent (y) s'ha de considerar que és una funció que depèn de la variable independent i per tant cal aplicar la regla de la cadena

Ex: Troba la derivada de la funció implícita : $y^3 + y^2 + 5xy + x^2 + x + y = 0$

$$3y^2 \cdot y' + 2y \cdot y' + 5y + 5x \cdot y' + 2x + 1 + y' = 0$$

$$y'(3y^2 + 2y + 5x + 2x + 1) = -5y - 1 \quad \rightarrow \quad y' = \frac{-5y - 1}{3y^2 + 2y + 5x + 2x + 1}$$

Estudi de la derivabilitat d'una funció

Si una funció és derivable en un punt, necessàriament és continua:

Derivabilitat → Continuïtat
No continuïtat → no derivabilitat
Continuïtat $\nrightarrow$ Derivabilitat

Si suposem que una funció f és continua en x_0 (ja que si no és continua no és derivable), si:

$$\left.\begin{array}{l}\exists\, f'(x_0^-)\\ \\ \exists\, f'(x_0^+)\end{array}\right\} \quad i\ f'(x_0^-) = f'(x_0^+) \Rightarrow \quad \exists\, f'(x_0)$$, la funció és *derivable en x_0*

Ex: Estudieu la derivabilitat de la funció: $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \prec 2 \\ 3x - 2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

a) Continuïtat

- si x < 2 → f(x) = x^2 → polinomi → continua i derivable
- si x > 2 → f(x) = 3x – 2 polinomi → continua i derivable
- si x = 2

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x^2 = 4\\ \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (3x - 2\ ) = 4\end{array}\right\} \ \exists \lim_{x\to 2} f(x) = 4$$ → f és continua en x = 2

f(x) és continua en |R

b) Derivabilitat

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & si\ x \prec 2 \\ 3 & si\ x \succ 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(2) = 4 \\ f'_+(2) = 3 \end{array}\right\} \ \nexists\, f'(x)$$ → f no és derivable en x = 2

f és continua en |R i derivable en $R - \{2\}$

Ex: Calculeu m i n perquè la funció següent sigui derivable en $x_0 = 1$

$$f(x)\begin{cases} x^2 - 5x + m & si\ x \le 1 \\ -x^2 + nx & si\ x \succ 1 \end{cases}$$

Si f és derivable en x = 1 → f és continua en x = 1

<u>Continuïtat</u> → $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2 - 5x + m = m - 4 \\ \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(-x^2 + nx\ \ ) = n - 1 \end{array}\right\} \quad m - 4 = n - 1$$

<u>Derivabilitat</u> → $f_1^-(1) = f_1^+(1)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & si\ x \le 1 \\ -2x + n & si\ x \succ 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_-^{'}(1) = -3 \\ f_+^{'}(1) = n - 2 \end{array}\right\} \quad -3 = n - 2 \to n = -1 \longrightarrow \quad m - 4 = -1 - 1 \to m = 2$$

<u>Derivades: aplicacions</u>

a) Recta tangent i normal a una corba en un dels seus punts

L'obtenció de la recta tangent a una corba en un dels seus punts és l'aplicació més immediata de les derivades, perquè com sabem, $f'(x_0)$ és el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = f(x_0)$ en el punt d'abscissa x_0.

Si f(x) és derivable en x_0, l'equació de la recta tangent a la gràfica de f(x) en el punt $P(x_0,y_0) = P(x_0,f(x_0))$ és:

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)} \quad \textit{Equació de la recta tangent}$$

Ex: Trobeu l'equació de la recta tangent a la corba $y = \frac{x^2 - 2x}{x+3}$ en $x_0 = 3$

f és continua i derivable en x_0

$$y_0 = y(3) = \frac{9-6}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+3)-(x^2-2x}{(x+3)^2} = \frac{2(x^2+3x-x-3)-x^2+2x}{(x+3)^2} =$$

$$\frac{2x^2+6x-2x-6-x^2+2x}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x-6}{(x+3)^2}$$

$$f'(3) = \frac{9+18-6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

Equació de la recta tangent: $\boxed{\left(y-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}(x-3)}$

Anomenem *recta normal* a una corba en un dels seus punt, a la recta perpendicular a la recta tangent a la corba en aquest punt.
Recordant la condició de perpendicularitat de dues rectes la pendent de la recta normal a la funció f(x) en el punt x_0 serà: $\frac{-1}{f'(x_0)}$ i la seva equació serà:

$$\boxed{y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)}$$ *Equació de la recta normal*

Ex: Trobeu l'equació de la recta normal a la corba del exemple anterior en el punt $x_0 = 3$

Equació de la recta normal: $\left(y-\frac{1}{2}\right) = \frac{-12}{7}(x-3)$

b) Creixement i decreixement d'una funció. Màxims i mínims

Una funció és creixent en un interval (a,b), si $\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$, si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Si f(x) és derivable en (a,b) $\Rightarrow$ $f'(x)>0\ \forall x \in (a,b)$
Una funció és decreixent en un interval (a,b), si $\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$, si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Si f(x) és derivable en (a,b) $\Rightarrow$ $f'(x)<0\ \forall x \in (a,b)$

- f(x) té un màxim en x_0 si $f'(x_0)=0$ i $f''(x_0)<0$

  f(x) té un mínim en x_0 si $f'(x_0)=0$ i $f''(x_0)>0$

Ex: Estudieu els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f(x) = x^3 - 3x + 2$
$f'(x) = 3x^2 - 3$

Possibles màxims o mínims de f(x) $\rightarrow$ $f'(x) = 0$
$3x^2 - 3 = 0$
$x = \pm 1$

La recta real queda dividida en tres intervals

$(-\infty, -1)$	$\rightarrow x = -2$	$f'(-2) > 0$	creixent
$(-1, 1)$	$\rightarrow x = 0$	$f'(0) < 0$	decreixent
$(1, +\infty)$	$\rightarrow x = 2$	$f'(2) > 0$	creixent

c) Concavitat i convexitat d'una funció. Punts d'inflexió

f(x) és còncava en un interval quan les rectes tangents a la corba en els punts de l'interval es troben per sobre del gràfic. Si $f''(x)<0 \Rightarrow$ és còncava en x
f(x) és convexa en un interval quan les rectes tangents a la corba en els punts de l'interval es troben per sota del gràfic. Si $f''(x)>0 \Rightarrow$ és convexa en x

• Si f (x) i f '(x) són derivables en x_0, si x_0 és un punt d'inflexió $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$
$f'''(x_0) \neq 0$

Ex: Punts d'inflexió de $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f(x) = x^3 - 3x + 2$
$f''(x) = 6x$

Possibles punts d'inflexió de f(x) $\rightarrow$ $f''(x) = 0$
$6x = 0$
$x = 0$

$f'''(0) = 6 \neq 0$ (0 , 2) és un punt d'inflexió de f(x)

d) Problemes d'optimització
Es tracta de fer màxima o mínima una funció. Aquesta pot venir donada per una o dues incògnites, en aquest cas cal expressar una d'elles a partir de l'altre

Ex: S'ha de construir un dipòsit cilíndric de 81π m^3 de volum. La superfície lateral ha de ser construïda amb un material que costa 30 €/m^2, i les dues bases amb un material que costa 45 €/m^2.

a) Determineu la relació que hi ha entre el radi r de les dues bases circulars i l'altura h del cilindre, i doneu el cost C (r) del material necessari per construir aquest dipòsit en funció de r
b) Quines dimensions ha de tenir el dipòsit perquè el cost dels materials necessaris sigui el mínim possible?

a)

Volum cilindre: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Superfície lateral: $S_l = 2\ \pi \cdot r \cdot h$

Superfície bases: $S_b = 2 \cdot \pi \cdot r^2$

Cost: $C = 30 \cdot S_l + 45 \cdot S_b$

$C(r, h) = 30 \cdot 2\ \pi \cdot r \cdot h + 45 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2$

La relació entre el radi r i l'altura h es calcula a partir del volum:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$81\pi = \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$h = \frac{81\pi}{r^2}$$

b)

Funció a minimitzar: $C(r, h) = 30 \cdot 2\ \pi \cdot r \cdot h + 45 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2$

$$C(r) = 60\ \pi \cdot r \cdot \frac{81\pi}{r^2} + 90\ \pi \cdot r^2$$

$$C(r) = \frac{4860\pi}{r} + 90\pi \cdot r^2$$

$$C'(r) = -\frac{4860\pi}{r^2} + 180\pi \cdot r$$

Extrems relatius: $C'(r) = 0$

$$0 = -\frac{4860\pi}{r^2} + 180\pi \cdot r$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{4860\pi}{180\pi}} = 3$$

Comprovem que r = 3 sigui un mínim amb la derivada segona:

$$C''(r) = \frac{9720\pi}{r^3} + 180\pi$$

$C''(3) > 0$ a r = 3 hi ha un mínim

radi = 3m i altura = 9 m

e) Aplicacions físiques de la derivada

Velocitat mitjana v_m $\quad v_m = \dfrac{\Delta e}{\Delta t} = \dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

Velocitat instantània $\quad v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta e}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = e'(t)$

Acceleració instantània $\quad a = v'(t) = e''(t)$

Regla de l'Hôpital

Aquesta regla, només aplicable a quocients de funcions derivables, és útil per resoldre indeterminacions en el càlcul de límits.

Donades dues funcions f i g contínues en [a,b] i derivables en (a,b), de forma que g'(x) $\neq$ 0 en (a,b) i existeix el límit $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{ó} \quad \frac{\infty}{\infty} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

• Observacions:

- S'aplica igualment al cas que $x \to \pm\infty$
- Abans de derivar simplifiqueu tots els factors possibles, i separeu aquells que donen límit diferent de 0 ó ∞

Ex:

$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{0}{0}$ i com totes dues funcions són contínues i derivables en un interval que inclou l' 1

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} = \frac{1}{x} = 1$$