Tema 1: NOMBRES REALS

1. NOMBRES ENTERS

Z = { 0, 1, -1, 2, -2, ... }. Es representen en una recta

Operacions

a) Suma i resta

Ex: $3 - 5 - 8 + 9 - 1 =$
$= 3 + 9 - 5 - 8 - 1 =$
$= 12 \quad - 14 =$
$= -2$

b) Producte i divisió

Ex : $(-2) \cdot (-3) = + 6$
$6 : (-2) = - 3$

OJO: Això només és cert quan es treballa en grups de nombres de dos en dos.
Ex: $(-2) \cdot (-4) \cdot (- 3) = - 24$

Propietat distributiva : $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ex :

$4 \cdot (5 + 3)$	=	$4 \cdot 5 + 4 . 3$
$4 \cdot \quad 8$	=	$20 + 12$
32	=	32
donem prioritat al parèntesi		apliquem la propietat distributiva i repartim el producte abans de sumar

Treure factor comú: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
Consisteix en aplicar a l'inrevès la propietat distributiva. Tal i com el seu nom indica
treure farem fora
factor un(s) nombre(s) que està(n) multiplicant i
comú que es troba a tots els termes de la suma o resta

Ex $_1$: $2 \cdot 5 + 2 \cdot 12 - 2 \cdot 8 = 2 \cdot (5 + 12 - 16)$
Ex $_2$: $4 \cdot 6 - 4 \cdot 3 + 4 = 4 \cdot (6 - 3 + 1)$

ÒJÓ: Quan en un terme sembla no quedar res hem de posar un 1 ja que, per exemple, $3 = 3 \cdot 1$. En el exemple anterior: $4 \cdot 6 - 4 \cdot 3 + 4 =$
$4 \cdot 6 - 4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 =$
$4 \cdot (6 - 3 + 1)$

Prioritat d'operacions
1er. Fem potències i arrels
2on fem les multiplicacions i divisions
3r fem les sumes i restes

Ex : $3 + 4 \cdot 2 - 8 : 2 =$
$= 3 + 8 - 4 =$
$= 11 - 4 = 7$

En el cas d'haver parèntesi: fem les operacions de dins del parèntesi fent servir l'ordre d'abans fins tenir un resultat i desprès les operacions que resten.

ÒJÓ: quan davant d'un parèntesi no hi ha cap signe de suma, resta, producte, o divisió, es multiplica el resultat obtingut pel nombre que hi ha justament abans.

Ex : $2 (5 + 3 \cdot 4) - 5 - 4 : 2 =$
$= 2 (5 + 12) - 5 - 4 : 2 =$
$= 2 (17) - 5 - 4 : 2 =$
$= 34 - 5 - 2 = 27$

Podem trobar-nos amb que dins d'un parèntesi tenim un altre, a les hores la resolució es fa de dins a fora, es a dir, primer es resol el parèntesi més interior.

Ex : $2 (4 + 5 (6 : 3 + 4 - 3) - 1) =$
$= 2 (4 + 5 (2 + 4 - 3) - 1) =$
$= 2 (4 + 5 \cdot 3 - 1) =$
$= 2 (4 + 15 - 1) =$
$= 2 \cdot 18 = 36$

2. NOMBRES RACIONALS

L'expressió $\frac{a}{b}$ s'anomena fracció. A *a* numerador, i a *b* denominador.

Representació gràfica

Per representar graficament una fracció en una recta,

a) dividim cada unitat en tantes parts iguals com indica el denominador, començant del 0 a la dreta si el nombre és positiu, i del 0 cap a l'esquerra en el cas de nombre negatiu.

b) començant des de 0 agafem tantes parts com indica el numerador.

Fraccions equivalents. Representen la mateixa quantitat. Per saber si dues fraccions són equivalents:

a) fem la divisió entre numerador i denominador, i si dona el mateix valor són equivalents;

b) multipliquem el numerador d'una fracció pel denominador de l'altre, i al inrevès. Si són equivalents donarà el mateix resultat.

Ex: 5/4 i 20/16	5: 4 = 1,2	$5 \cdot 16 = 80$	
	20:16 = 1,2	$20 \cdot 4 = 80$	Si

Per obtenir fraccions equivalents a una donada, multipliquem o dividim, numerador i denominador, pel mateix nombre.

Ex:

$$\frac{12}{20} \rightarrow \frac{3}{5}\ (:4) \qquad \frac{12}{20} \rightarrow \frac{36}{60}\ (\cdot 3)$$

Operacions

a) Suma i resta.

- Posem com a nou denominador el m.c.m dels denominadors.
- Multipliquem els numeradors pel resultat de la divisió: numerador nou / numerador vell
- Sumem i/o restem els numeradors mantenint el denominador.

Ex:

$$\frac{3}{4} + 2 - \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot \overset{20:4}{5}}{20} + \frac{2 \cdot \overset{20:1}{20}}{20} - \frac{1 \cdot \overset{20:5}{4}}{20} = \frac{15}{20} + \frac{40}{20} - \frac{4}{20} = \frac{51}{20}$$

$$\text{m.c.m} = 2^2 \cdot 5 = 20$$

b) Producte: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\frac{c}{d}$ Ex: $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$

c) Divisió: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\frac{d}{c}$ Ex: $\frac{3}{2} : \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{9} = \frac{18}{18}$

Simplificació de fraccions

a) Dividim numerador i denominador per divisors comuns.

Ex:

$$\frac{240}{128} \overset{:4}{=} \frac{60}{32} \overset{:2}{=} \frac{30}{16} \overset{::2}{=} \frac{15}{8}$$

b) Descomposem factorialment numerador i denominador, eliminant els factors que es repeteixen a dalt i a baix.

Ex: $$\frac{3246}{5184} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot67}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3} = \frac{67}{108}$$

La fracció obtinguda no es pot simplificar més, s'anomena fracció irreductible.

3. POTÈNCIES

Potències. Consisteix en multiplicar factors iguals: $a^b = a \cdot a \cdot a \cdot ..... \cdot a$

"b" vegades

on a – base i b – exponent. Ex: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Propietats:

1. $\mathbf{a^1=a}$ Ex: $5^1 = 5$

2. $\mathbf{a^0=1}$ Ex: $(-2)^0 = 1$

3. Operacions.

En general, per fer operacions amb potències, es calculen aquestes i es fan les operacions indicades.

Ex: $3^2 + 5^2 - 2^3 = 9 + 25 - 8 = 26$

Ex: $2^5 \cdot 5^3 = 32 \cdot 125$

Hi han casos especials on es poden fer alguns pasos que simplifiquen la feina, es tracta de **producte i divisió de potències amb la mateixa base**

$\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ Ex: $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$

$\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$ Ex: $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$

3. Potència d'un producte o d'una divisió:

$\mathbf{(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m}$ $\mathbf{(a : b)^m = a^m : b^m}$

Ex:

$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$

$12^2 = 9 \cdot 16$

$144 = 144$

$(36:4)^2 = 36^2 : 4^2$

$9^2 = 1296 : 16$

$81 = 81$

5. $\mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$ Ex: $(2^3)^2 = 2^6$

6. $\mathbf{a^{-m} = 1 / a^m}$ Ex : $2^{-3} = 1 / 2^3$

Notació científica

Consisteix en fer servir potències de 10 per expressar quantitats molt grans o molt petites.

Observacions

a)

$10^{\text{nº positiu}}$ unitat seguida de tants zeros com indica el nombre

Ex:

$10^3 = 1000$
$10^{12} = 1000\ 000\ 000\ 000$

$10^{\text{nº negatiu}}$ pensem en les propietats de les potències

Ex :

$10^{-2} = 1 / 10^2 = 1 / 100 = 0{,}01$
$10^{-15} = 1 / 10^{15} = 0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 001$

b)

$3 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10\ 000 = 30\ 000$
$2{,}5 \cdot 10^{12} = 2\ 500\ 000\ 000\ 000$

$4 \cdot 10^{-2} = 0{,}04$
$3{,}5 \cdot 10^{-1} = 0{,}\ 35$

c) Un nombre es pot expressar de moltes formes

$$2{,}38 \cdot 10^{12} = 23{,}8 \cdot 10^{11} = 0{,}238 \cdot 10^{13}$$

El que permet fer operacions amb nombres d'aquests tipus.

Amb tot, la forma correcta d'escriure un nombre en notació científica és amb un nombre decimal de una sola xifra entera diferent de zero multiplicada per la potència de 10 corresponent; en el cas anterior $2{,}38 \cdot 10^{12}$

d) Operacions

- Sumes i restes

Expressem totes les quantitats amb una mateixa potència
Treiem factor comú
Sumem i/ o restem

Ex :

$3{,}4 \cdot 10^{15} - 2 \cdot 10^{14} =$
$= 3{,}4 \cdot 10^{15} - 0{,}2 \cdot 10^{15} =$

$= (3{,}4 - 0{,}2) \cdot 10^{15} =$
$= \quad 3{,}2 \quad \cdot 10^{15}$

- Producte i divisió

Ex :

$2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{3} =$
$= 2{,}5 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{3} =$
$= 12{,}5 \cdot 10^{-1}$

Aproximacions i errors

El treball amb nombres decimals comporta problemes ja que de vegades l'aparell amb el que es fa la mesura no és prou precís per donar-nos totes les xifres decimals, o be el nombre té tantes xifres decimals que és incòmode treballar amb ell i el reduïm, l'aproximem. Tot això comporta un error.

a) Aproximacions. Es poden fer per truncament o per arrodoniment

- truncament: es tracta d'escriure les xifres decimals que té el nombre fins les dècimes, centèsimes, ... segons convingui, sense tenir en compte les xifres de darrera
- arrodoniment: es tracta del mateix que abans però fixan-nos en la xifra següent que quedaria fora. Si aquesta xifra és inferior a 5 (de 0 a 4) deixem la última xifra decimal escollida com està però si és 5 o més (de 5 a 9) hem d'afegir 1 a la última xifra.

Ex: 23,46987 ho volem aproximar amb dues xifres decimals

Per truncament 23,46
Per arrodoniment 23,47 (ja que la següent xifra és 9)

b) Errors. Hi ha dos tipus: absolut i relatiu

- Error absolut: és la diferència, en valor absolut, del valor real x i el valor aproximat x'

$$E_x = | x - x' |$$

- Error relatiu: és l'error absolut dividit pel valor exacte o real

$$\varepsilon_x = \frac{E_x}{|x|}$$

En el cas anterior:

	E_x	ε_x
Truncament	0,00987	
Arrodoniment		

• Acotació d'errors. Quan arrodonim un nombre fins a un ordre n cometem un error absolut que compleix

$$E_x < \frac{1}{2 \cdot 10^n}$$

mentre que l'error relatiu compleix

$$\varepsilon_x < \frac{E_x}{x - E_x}$$

4. **ARRELS**

Arrel. És l'operació inversa d'elevar a una potència

$\sqrt[n]{a} = b \qquad b^n = a \qquad a$ = radicand
n = índex

Ex:

$\sqrt{81} = \pm 9$ ja que $9^2 = 81$
$(-9)^2 = (-9) \cdot (-9) = 81$

$\sqrt[4]{81} = \pm 3$ ja que $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

$\sqrt[5]{-32} = -2$ ja que $(-2)^5 = -32$

Propietats:

1. Signe de l'arrel

Index Radicand	Nº parell	Nº senar
Positiu	±	+
Negatiu	no existeix	-

2. Operacions
a)Suma i resta. Primer hem de calcular l'arrel i després fer l'operació.
Ex: $\sqrt{64} + \sqrt{4} - \sqrt{100} = 8 + 2 - 10 = 0$

b)Producte i divisió.
En general, primer farem l'arrel i després el producte o la divisió.
Ex:
$\sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{-64} = 3 \cdot (-4) = -12$

Si les arrels que es multipliquen o es divideixen tenen el mateix índex, podem primer multiplicar o dividir, i després fer l'arrel
Ex: $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{25 \cdot 4}$
$5 \cdot 2 = \sqrt{100}$
$10 = 10$

c) Potència d'una arrel $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{b} = \sqrt[n]{a^b}$. Ex: $(\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3}$

$$2^3 = \sqrt{64}$$
$$8 = 8$$

d) Arrel d'una arrel $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$. Ex: $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = \pm\ 2$

3. $\sqrt[n]{a^n} = a$. Ex: $\sqrt{4^2} = 4$

4. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Ex: $\sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$

<u>Càlcul d'arrels</u>. A part de les més inmediates com $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{-8}$, etc. podem calcular arrels de nombres grans.

a) Factoritzem el radicand;
b) Expressem els exponents com a suma de tants índexs com sigui possible;
c) Separem l'arrel com a producte d'arrels
d) Simplifiquem

Ex:

$$\sqrt{576} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2} = \sqrt{2^{2+2+2} \cdot 3^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} =$$
$$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Ex:

$$\sqrt[3]{-192} = -\sqrt[3]{2^6 \cdot 3} = -\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = -2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{3} = -4 \cdot \sqrt[3]{3}$$

<u>Racionalització</u>

Consisteix en trobar una fracció equivalent a la donada però sense arrels al denominador.

a) Si no hi ha sumes o restes al denominador, multipliquem numerador i denominador per l'arrel convenient

Ex:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{4^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{4^2}}{\sqrt[5]{4^3} \cdot \sqrt[5]{4^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{4^2}}{\sqrt[5]{4^5}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{4^2}}{4}$$

b) Si hi ha suma o resta al denominador, multipliquem numerador i denominador pel conjugat

Ex:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right) \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

5. LOGARITMES

<u>Logarítme</u>
Si $a > 0$, s'anomena logaritme en base ***a*** de **p** i es designa $\log_a p$, l'exponent al qual cal elevar a per obtenir p.

$$\boxed{\log_a p = x \leftrightarrow a^x = p}$$

Ex:

a) $\log_2 8 = 3$, ja que $2^3 = 8$

b) $\log_5 25 = 2$, ja que $5^2 = 25$

c) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, ja que $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

- Si la base a = 10 es tracta d'un <u>logaritme decimal</u> i es designa simplement per log p.
- Si la base és a = e = 2.7182818.... es tracta d'un <u>logaritme neperià</u> i es designa per ln p
- <u>No existeix el logarítme de 0 ni d'un nombre negatiu</u> ja que, com la base ***a*** és positiva, al elevar-la a qualsevol nombre el resultat serà positiu

<u>Propietats dels logaritmes</u>

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a (p \cdot q) = \log_a p + \log_a q$
4. $\log_a \left(\frac{p}{q}\right) = \log_a p - \log_a q$
5. $\log_a p^n = n \cdot \log_a p$

Ex: Expressa el log 1800 en funció de log 2 i log 3

$$\begin{aligned} \log 1800 &= \log(2 \cdot 3^2 \cdot 10^2) = \\ &= \log 2 + \log 3^2 + \log 10^2 = \\ &= \log 2 + 2 \cdot \log 3 + 2 \log 10 = \\ &= \log 2 + 2 \cdot \log 3 + 2 \cdot 1 = \\ &= 2 + \log 2 + 2 \cdot \log 3 \end{aligned}$$

Canvi de base

La calculadora només treballa amb logaritmes decimals i neperians, per aquest motiu cal fer un canvi de base si el logaritme a resoldre no és inmediat.

$$\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

Ex: $\log_3 4$

$$\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3} \quad \text{o} \quad \log_3 4 = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$