

Tema 2: EQUACIONS

Igualtats algebraïques

Es poden diferenciar: identitats i equacions

a) Identitats

Són igualtats que sempre es compleixen, per qualsevol valor que donem a les lletres. Les més importants són els productes notables

Quadrat d'una suma	$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
Quadrat d'una resta	$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
Suma per diferència	$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Ex: $(x + 5)^2 = x^2 + 5^2 + 2 \cdot x \cdot 5 = x^2 + 25 + 10x$ on $a=x$ i $b=5$

b) Equacions.

Són igualtats que només es compleixen per determinats valors numèrics de les variables

- **Classificació. Segons:**

- el nombre de variables o incògnites (lletres)

Ex: $3x - 2y = 8$ Equació amb dues incògnites

$3 - x^2 = 2 + x$ Equació amb una incògnita

- el major exponent que presenta la variable

Ex: $2 + y^4 + 5y = y^2$ Equació de grau quatre

$5x - 2 = 3x$ Equació de primer grau

Equacions de primer grau amb una incògnita

La resolució consisteix en trobar el valor numèric de la variable pel qual es compleix la igualtat. Hem de:

- i) eliminar els parèntesi
- ii) eliminar els denominadors
- iii) passem tots els termes que tenen incògnita (sola o acompanyada per un coeficient) a un costat de la igualtat i la resta a l'altre. Hem de tenir en compte que en canviar de costat el nombres que estan

sumant	passen	restant
restant	“	sumant
multiplicant	“	dividint , ...

- iv) agrupem termes i aïllem la variable

Ex:

$$\begin{aligned}2x - 8 &= 5x + 1 \\2x - 5x &= 8 + 1 \\-3x &= 9 \\x &= \frac{9}{-3}\end{aligned}$$

OJO: Només es canvia l'operació de multiplicació per la divisió, no el signe del -3

$$x = -3$$

Ex:

$$\begin{aligned}2(x - 4) &= 3 - x \\2 \cdot x - 2 \cdot 4 &= 3 - x \\2x - 8 &= 3 - x \\2x + x &= 3 + 8 \\3x &= 11 \\x &= \frac{11}{3}\end{aligned}$$

Ex:

$$2x - \frac{3}{8} = 5 + \frac{x}{12}$$

$$\begin{aligned}8 &= 2^3 \\12 &= 2^2 \cdot 3 & 2^3 \cdot 3 &= 24\end{aligned}$$

$$\frac{2x \cdot 24}{24} - \frac{3 \cdot 3}{24} = \frac{5 \cdot 24}{24} + \frac{x \cdot 2}{24}$$

$$\begin{aligned}2x \cdot 24 - 3 \cdot 3 &= 5 \cdot 24 + x \cdot 2 \\48x - 9 &= 120 + 2x \\48x - 2x &= 120 + 9 \\46x &= 129 \\x &= \frac{129}{46}\end{aligned}$$

• Aplicacions:

La principal aplicació és la resolució de problemes.

Cal recordar que:

- hem d'assignar la incògnita a la dada que em demana el problema. Si em demana més d'una cosa podem relacionar-les entre si
- cal respondre al final allò que em demanen

Ex: En una reunió hi ha 156 persones entre homes, dones i nens. El nombre de dones és el doble que el d'homes, i el de nens el triple de la suma del nombre de dones i d'homes.

Calculeu quantes persones hi ha de cada grup.

Nº d'homes: x

Nº de dones: doble de dones $\rightarrow 2 \cdot x = 2x$

*Nº de nens: triple de la suma de dones i homes \rightarrow triple de $x + 2x \rightarrow$ triple de $3x$
 $\rightarrow 3 \cdot 3x \rightarrow 9x$*

$$\begin{aligned} \text{Nº homes} + \text{nº dones} + \text{nº nens} &= 156 \\ x + 2x + 9x &= 156 \\ 12x &= 156 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

R: El nombre d'homes és 13, el de dones és de 26, i el de nens 117.

Sistemes d'equacions amb dues incògnites

Es classifiquen segons la solució

Sistemes	{	compatibles	{	determinats	una única solució
				indeterminats	moltes solucions
	incompatibles				no tenen solució

Hi ha tres mètodes numèrics de resolució:

- a) Substitució. Consisteix en deixar sola una de les variables d'una de les equacions i substituir el resultat obtingut a l'altre equació

Ex:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} 2x - 3y &= 2 \\ -x + 4y &= -1 \end{aligned} \right\} & \quad \left. \begin{aligned} 2x - 3y &= 2 \\ 4y + 1 &= x \end{aligned} \right\} & \quad \begin{aligned} 2(4y + 1) - 3y &= 2 \\ 8y + 2 - 3y &= 2 \\ 5y &= 0 \\ y &= 0 \\ \\ 4y + 1 &= x \\ 4 \cdot 0 + 1 &= x \\ 1 &= x \end{aligned} \end{aligned}$$

Sistema compatible determinat

- b) Igualació. Consisteix en deixar sola la mateixa variable de totes dues equacions i igualar els resultats obtinguts.

Ex:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = 5 \\ 6y = 10 - 2x \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x = 5 - 3y \\ x = \frac{10 - 6y}{2} = 5 - 3y \end{array} \right\}$$

$$5 - 3y = 5 - 3y$$

$$3y - 3y = 5 - 5$$

$$0y = 0$$

$y = \text{qualsevol nombre}$

$x = \text{un nombre igual a } 5 - 3y$

Sistema compatible indeterminat

- c) Reducció. Consisteix en multiplicar una o les dues equacions pel (pels) nombre (s) convenients, de manera que en sumar totes dues equacions una de les variables quedi anul·lada.

Ex:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ -x + y = -1 \end{array} \right\} \quad x \cdot 2 \quad \left. \begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ -2x + 2y = -2 \end{array} \right\}$$

$$/ \quad y = 2$$

$$2x - y = 4$$

$$x = 3$$

Sistema compatible determinat

Ex :

$$\left. \begin{array}{l} -3x + y = 2 \\ -6x + 2y = 1 \end{array} \right\} \quad x(-2) \quad \left. \begin{array}{l} 6x - 2y = -4 \\ -6x + 2y = 1 \end{array} \right\}$$

$$/ \quad / \quad = -3$$

$$0 = -3$$

Sistema incompatible

- La representació gràfica de les equacions com rectes ens permet solucionar el sistema

- Aplicació

Ex: En una granja tenim 25 animals entre gallines i conills. Si tenim 80 potes, quants animals tenim de cada tipus?

$$x = n^{\circ} \text{ de gallines}$$

$$y = n^{\circ} \text{ de conills}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 25 \\ 2x + 4y = 80 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x(-2) \quad -2x - 2y = -50 \\ 2x + 4y = 80 \end{array} \right\}$$

$$\hline / \quad 2y = 30$$

$$y = 15$$

$$x = 10$$

R: Tenim 15 conills i 10 gallines

Equació de segon grau amb una incògnita

Ex:

$$x - 3 = x^2$$

$$2x^2 - x = 3x$$

Per resoldre una equació de segon grau amb una incògnita

- traiem parèntesi
- traiem denominadors
- agrupem termes
- passem tot a un costat de la igualtat fins obtenir una expressió

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad \text{on } a, b, c \text{ són nombres}$$

- Podem tenir:

a) **Equacions completes** $a x^2 + b x + c = 0$

Apliquem la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observació: l'expressió $b^2 - 4ac$ s'anomena discriminant (Δ)

- si $\Delta > 0$ hi ha dues solucions
- si $\Delta = 0$ hi ha una solució
- si $\Delta < 0$ no té solució

b) Equacions incompletes

$$a x^2 + b x = 0$$

Podem aplicar la fórmula o treure factor comú la x

$$\begin{aligned} a x^2 + b x &= 0 \\ x (a x + b) &= 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ a x + b = 0 \quad x = \frac{-b}{a} \end{array} \right.$$

$$a x^2 + c = 0$$

Podem aplicar la fórmula o deixar sola la x

$$\begin{aligned} a x^2 + c &= 0 \\ x &= \pm \sqrt{\frac{-c}{a}} \end{aligned}$$

Equacions biquadrades

Són equacions del tipus $a x^4 + b x^2 + c = 0$

Per resoldre fem un canvi de variable $t = x^2$,

$$a x^4 + b x^2 + c = 0$$

$$\downarrow x^2 = t$$

$$a t^2 + b t + c = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} t_1 & x = \pm \sqrt{t_1} \\ t_2 & x = \pm \sqrt{t_2} \end{cases}$$

Ex:

$$3x^4 = 10 - 13x^2$$
$$3x^4 + 13x^2 - 10 = 0$$

$$\downarrow \quad x^2 = t$$

$$3t^2 + 13t - 10 = 0$$

$$t = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10)}}{2 \cdot 3} = \begin{cases} \frac{4}{6} & x = \pm \sqrt{\frac{4}{6}} \\ -5 & x = \sqrt{-5} \\ & (\text{No té solució}) \end{cases}$$

Equacions irracionals

Són equacions on la variable o incògnita es troba dins d'arrel

Ex:

$$\sqrt{x+1} = 3x$$

Podem tenir:

a) una sola arrel

- separem l'arrel de la resta a costats diferents de la igualtat
- agrupem termes
- elevem al quadrat tots dos costats de la igualtat
- resollem l'equació

Ex:

$$\sqrt{2x-1} - 2x = 1$$

$$\sqrt{2x-1} = 1 + 2x$$

$$(\sqrt{2x-1})^2 = (1 + 2x)^2$$

$$\downarrow (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

$$2x - 1 = 1 + 4x^2 + 4x$$

$$0 = 4x^2 + 2x + 2$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 4} \quad \text{No té solució}$$

b) dues o més arrels

- separem les arrels a costats diferents de la igualtat
- elevem al quadrat tots dos costats de la igualtat
- si queden encara arrels repetim el procediment fins aplicar l'apartat anterior
- solucionem l'equació

Ex:

$$3 - \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = 0$$

$$3 - \sqrt{x} = \sqrt{x-1}$$

$$(3 - \sqrt{x})^2 = (\sqrt{x-1})^2$$

$$\downarrow (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$9 + x - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x} = x - 1$$

$$10 = 6\sqrt{x}$$

$$10^2 = (6\sqrt{x})^2$$

$$100 = 36x$$

$$x = \frac{25}{9}$$