TEMA 2. Funcions

Funció
S'anomena funció real de variable real a tota aplicació que fa correspondre a cada element d'un conjunt inicial o domini un i només un element d'un conjunt final o recorregut.

$$y = f(x)$$

Característiques:

a) Domini:
Conjunt de valors que pot prendre la *x* (el càlcul de la fórmula és possible o és coherent amb les condicions)

Funció	Domini	Hem de ….	Dom f
Polinòmica	|R	-	|R
Fracció algebraica	Tots els nombres menys els que facin 0 el denominador ja que |R/0 no existeix	Solucionar l'equació denominador = 0	|R – { solucions de l'equació }
Arrel d'índex parell	Tots els nombres menys els que facin que el radicand sigui negatiu	Solucionar la inequació radicand ≥ 0	Solucions de la inequació
Arrel d'índex senar	|R	-	|R
Exponencial	Segons quin dels casos anteriors es doni a l'exponent	Veure casos anteriors	Veure casos anteriors
Logarítmica	Tots els nombres menys els que facin tenir logaritme de 0 o d'un negatiu, i els casos anteriors	Expressió > 0 o veure casos anteriors	Solucions de la inequació o veure casos anteriors

Ex:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+3}}$$

$$\frac{2x}{x+3} \geq 0 \quad i \quad x + 3 \neq 0$$

$2x \geq 0$	i	$x + 3 > 0$		
$x \geq 0$		$x > -3$	$\rightarrow$	$x \geq 0$
$2x \leq 0$	i	$x + 3 < 0$		
$x \leq 0$		$x < -3$	$\rightarrow$	$x < -3$

$$Dom = (-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$$

Ex:

$g(x) = \log(x + 4)$

$x + 4 > 0$

$x > -4$

$Dom = [-4, +\infty)$

- A nivell gràfic el domini és la projecció de tots els punts del gràfic sobre l'eix x

b) Recorregut

Conjunt final o conjunt de valors que pren la *y* (resultats obtinguts en aplicar la fórmula)

Ex:

$f(x) = x^2 - 2 \qquad Im = [-2, +\infty)$

- A nivell gràfic el recorregut és la projecció de tots els punts del gràfic sobre l'eix y

c) Simetria

- parella	f(x) = f(-x)	(respecte l'eix y)
- senar	f(-x) = -f(x)	(respecte les bisectrius o els eixos)

Ex :

$y = x^4 + 2$

$f(x) = x^4 + 2$

$f(-x) = (-x)^4 + 2 = x^4 + 2$

$-f(x) = -x^4 - 2$ *simetria parella*

d) Punts de tall amb els eixos

- amb l'eix x: y = 0
- amb l'eix y: x = 0

Ex:

$$f(x) = \frac{2x+5}{x^2}$$

punts de tall amb l'eix x: y = 0

$$\frac{2x+5}{x^2} = 0$$

$$2x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-5}{2} \qquad\qquad (\frac{-5}{2}, 0)$$

punts de tall amb l'eix y: x = 0

$$y = 2 \cdot 0 + \frac{5}{0^2} \qquad\qquad y = \frac{5}{0}$$

no hi ha

• Com a màxim hi ha un punt de tall amb l'eix y

e) Continuïtat

Una funció f(x) és contínua en un punt x=c si:

a) $\exists \lim_{x \to c} f(x)$

b) $\exists$ f(c)

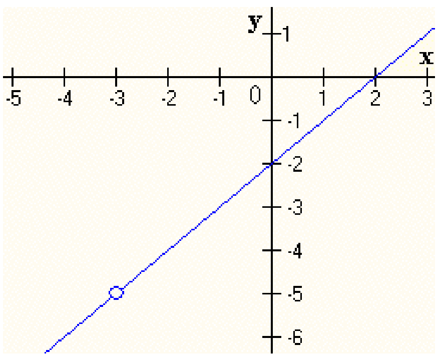
c) $\lim_{x \to c} f(x)$ = f(c)

• Una funció és contínua si ho és en tots els punts del seu domini. En cas contrari la funció és discontínua

Tipus de discontinuïtat:

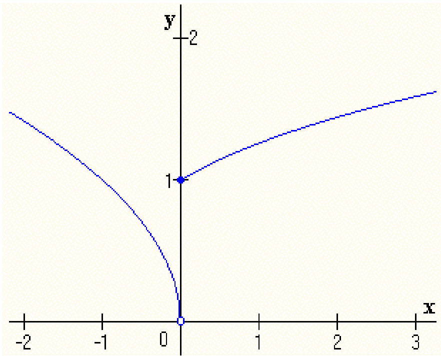
i) *Evitable*. Si $\exists \lim_{x \to c} f(x)$ però $\lim_{x \to c} f(x) \neq$ f(c), per què no existeix la imatge o aquesta no coincideix amb el límit.

Ex:



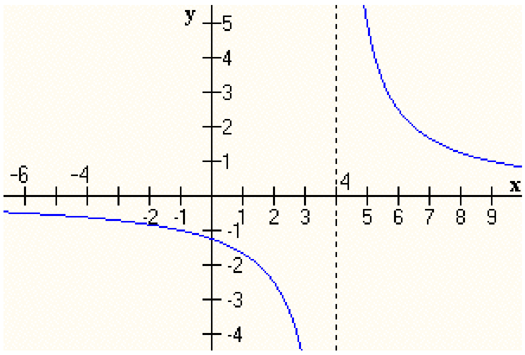
ii) *De salt*. Si $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$.

Ex:



iii) *Asimptòtica*. Els límits laterals tendeixen a $\pm\infty$.

Ex:



• <u>Tipus d'asímptotes</u>:

- verticals x = K (recta paral·lela a l'eix d'ordenades)
- horitzontals y = k (recta paral·lela a l'eix d'abscisses)
- obliqües y = mx + n (recta amb pendent m)

1. *Asímptotes verticals*:

   En x = c hi ha una asímptota vertical si $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ i $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$.

   Ex: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$

   Dom f = |R – { 3 }, això implica que no hi ha imatge per x=3 i que la funció és discontinua per aquest valor.
   Quin tipus de discontinuïtat? Com

   $$\lim_{x \to 3^+} \frac{x+1}{x-3} = +\infty \qquad i \qquad \lim_{x \to 3^-} \frac{x+1}{x-3} = -\infty$$

   podem dir que hi ha una discontinuïtat asimptòtica, es a dir, una asímptota vertical en x = 3.

2. *Asímptotes horitzontals:*
   En y = k hi ha una asímptota horitzontal si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$ i /o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$.

   Ex: $$y = \frac{2}{x^2 - 1}$$

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

   Hi ha una asímptota horitzontal en y = 0.

3. *Asímptota obliqua:*
   En y = mx +n hi ha una asímptota obliqua si existeixen els límits per $\pm\infty$:

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$
   $$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = n$$

   Ex: $$y = \frac{2x^2 - x}{3x}$$

   $$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x}{3x^2} = \frac{2}{3}$$
   $$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x}{3x} - \frac{2}{3}x = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{9x} = \frac{-1}{9}$$

   Hi ha una asímptota obliqua en $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$

f) Creixement i decreixement. Màxims i Mínims

- Direm que una funció f(x) és *creixent* en (a,b) si $\forall$ x_1, x_2 $\in$ (a,b) / $x_1<x_2$ $\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Si $f(x_1)<f(x_2)$ direm que la funció és *estrictament creixent.*

  Observem que en un interval creixent les rectes tangents al gràfic de f(x) seran creixents, es a dir, amb pendent positiu. Una funció f(x) derivable en (a,b) és creixent en aquest interval si f'(x)>0 $\forall$ x $\in$ (a,b).

- Direm que una funció f(x) és *decreixent* en (a,b) si $\forall$ x_1, x_2 $\in$ (a,b) / $x_1<x_2$ $\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. Si $f(x_1)>f(x_2)$ direm que la funció és *estrictament decreixent.*

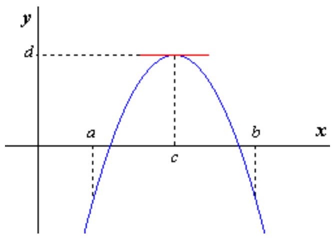
Una funció f(x) derivable en (a,b) és decreixent en aquest interval si $f'(x)<0 \ \forall \ x \in (a,b)$.

- Direm que una funció f(x) és constant en (a,b) si $\forall$ x1, x2 $\in$ (a,b) / $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)= f(x_2)$.

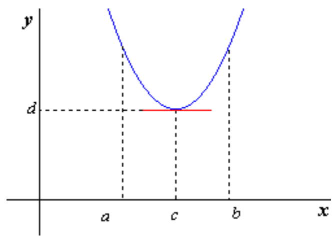
- Direm que en x = c f(x) assoleix un *màxim relatiu* quan just en aquest valor la funció passa de creixent a decreixent.

  Direm que en x = c f(x) assoleix un *mínim relatiu* quan just en aquest valor la funció passa de decreixent a creixent.

Gràficament



en c de creixent a decreixent



en c de decreixent a creixent

Els màxims i mínims relatius s'anomenen *extrems relatius* de la funció.

Observem que en tots dos casos la recta tangent a la corba és horitzontal el que implica un pendent igual a 0, no són però casos únics: en els punts d'inflexió la tangent és també horitzontal.

> f(x) presenta un extrem relatiu en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.
> $f'(x_0) = 0$ no implica que x_0 sigui un màxim o un mínim ja que pot ser un punt d'inflexió.

Per trobar els extrems relatius haurem d'estudiar si canvia el signe de la derivada a tots dos costats d'aquells punts que presenten valor de derivada primera igual a 0.

Els punts on la tangent és horitzontal , es a dir, aquells on $f'(x) = 0$ s'anomenen *punts singulars* o *punts crítics.*

Ex: Donada la funció $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ estudia els intervals de creixement i decreixement. Determineu els extrems relatius.

Per estudiar el creixement i decreixement de la funció cal veure en quins punts la derivada primera s'anul·la

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \qquad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Rightarrow x = 3 \quad i \quad x = -1$$

Aquests resultats divideixen el domini en intervals. Cal veure en quins intervals la derivada de la funció és positiva i en quins és negativa

$-\infty$ ______________ *-1* ____________ *3* ____________ $+\infty$

f'(x)	+	-	+
f(x)	*creixent*	*decreixent*	*creixent*

ja que si agafem qualsevol nombre de $(-\infty,-1)$, *per exemple el -2, observem que el valor de la derivada primera és positiu: f'(-2) = 12+12-9>0; si fem el mateix amb els altres intervals*

f'(0)= -9 <0

f'(4)= 48+24-9>0

es verifiquen els intervals de creixement i decreixement anteriors

f(x) és creixent en $(-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$

f(x) és decreixent en $(-1,3)$

Com Dom f = |R i és una funció continua (polinòmica)

(-1,0) és un màxim relatiu

(3,-22) és un mínim relatiu

IMPORTANT!!!. Quan estudiem els intervals de creixement i decreixement no només hem de definir-los amb els punts on la derivada primera és 0, si no també amb aquells que no pertanyen al domini o els que el defineixen.

Ex: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Dom f = /R – { 1 }

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \qquad f'(x) = 0 \quad si\ x=0 \ \ o \ \ x=2$$

$-\infty$ ___________ *0* ___________ *1* ___________ *2* __________ $+\infty$

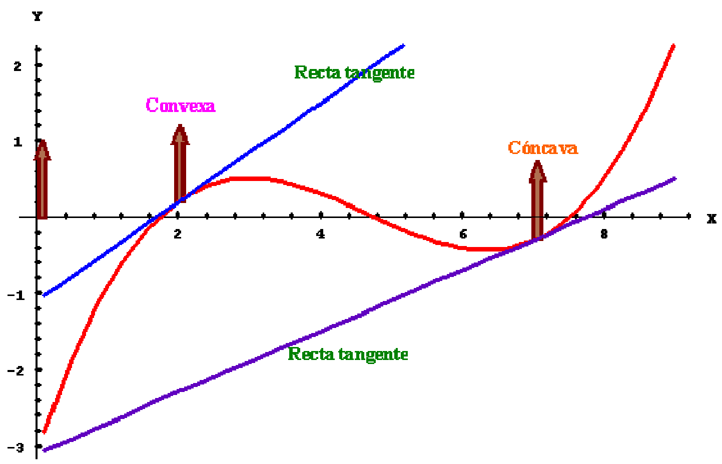
f'(x)	+	-	+	-
f(x)	*creixent*	*decreixent*	*creixent*	*decreixent*

f(x) és creixent: $(-\infty,0)\cup(1,2)$
f(x)és decreixent: $(0,1)\cup(2,+\infty)$

Màxim: (0,0) i (2,4). En x=1 no hi ha màxim ni mínim ja que no pertany al domini.

g) Concavitat i convexitat. Punts d'inflexió.

Gràficament:



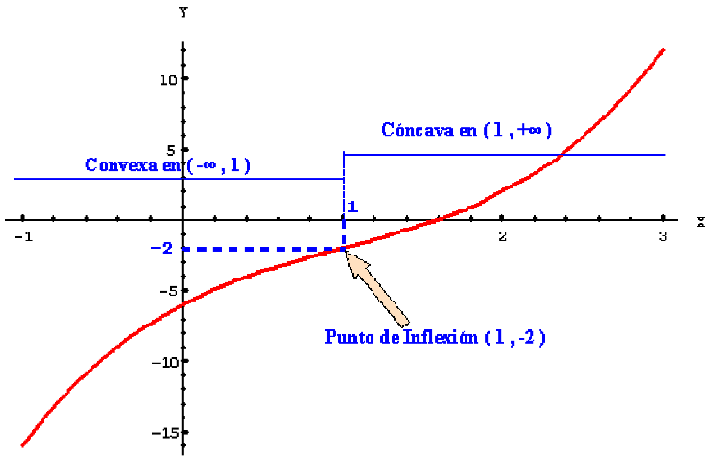
- Una funció es *còncava* en un interval (a,b) si totes les tangents a la gràfica en aquest interval queden per sota de la gràfica.

  Si estudiem les rectes tangents a la corba observem que l'interval de concavitat tenim (d'esquerra a dreta) en principi rectes decreixents cada vegada amb un pendent de valor absolut menor, fins que arriba a un punt on la recta tangent és horitzontal i, des d'aquest, comencen a ser creixents cada vegada amb major pendent. Si en valor dels pendents (f'(x)) els representem gràficament obtindrem una funció creixent que passa de valors negatius a positius; en derivar la funció obtinguda, es a dir, en calcular f''(x), com aquesta és creixent, obtindrem valors positius.
  Si f''(x)>0 en (a,b) $\Rightarrow$ f(x) és còncava en (a,b).

- Una funció es *convexa* en un interval (a,b) si totes les tangents a la gràfica en aquest interval queden per sobre de la gràfica.

  Si f''(x)>0 en (a,b) $\Rightarrow$ f(x) és còncava en (a,b).

- El punt en que la gràfica d'una funció passa de ser còncava a convexa o al contrari s'anomena <u>punt d'inflexió</u>. En aquest punt la tangent travessa la gràfica.



Siguin f(x) i f'(x) derivables en x_0 i x_0 és un punt d'inflexió $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$

$f'''(x_0) \neq 0$

Ex: Estudieu la curvatura de la funció $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 5$.

Dom f = /R

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2$

$f''(x) = 36x^2 - 48x$ $\quad f''(x)=0$ si $\quad 12x\cdot(3x-4)=0 \quad x=0$ o $x=\dfrac{4}{3}$

Aquests valors defineixen uns intervals on, de forma semblant al cas del creixement i decreixement, hem d'estudiar el signe de la derivada segona

	$-\infty$ ____ 0	____ $\frac{4}{3}$	____ $+\infty$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	∪	∩	∪

Concavitat: $(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{4}{3},+\infty\right)$

Convexitat: $\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$

Punts d'inflexió: $(0,5)$ i $(\dfrac{4}{3},\quad)$

ANNEX 1. **FUNCIONS ELEMENTALS**

a)<u>Funcions polinòmiques</u>

Funcions polinòmiques de grau 0

Tipus	Fórmula	Gràfic	Pendent	Punts de tall	Exemple
Constant	y = b	Recta horitzontal	0	(nº , b)	y = 2 recta horitzontal que passa per (0,2) i (1,2)

Funcions polinòmiques de 1r grau

Tipus	Fórmula	Gràfic	Pendent	Punts de tall	Exemple
Afí	y = ax + b	Recta obliqua creixent si a > 0 decreixent si a < 0	a	(0 , b) $(\frac{-b}{a}, 0)$	y = 3x + 2 recta creixent que passa per (0,2) i $(\frac{-2}{3},0)$
Lineal	y = ax			(0 , 0) (1 , a)	y = -x recta decreixent que passa per (0,0) i (1,-1)

• El pendent indica el grau d'inclinació de la recta, quant més gran és el seu valor absolut més vertical és.

Funció polinòmica de 2n grau

Tipus	Fórmula	Gràfic	Vèrtex	Exemple
Completa	$y = ax^2 + bx + c$	Paràbola còncava si a > 0 convexa si a < 0	$(\frac{-b}{2a}, ...)$	$f(x) = x^2 - 2x + 1$ paràbola còncava (a = 1) amb vèrtex a (1 , 0)
Incompleta	$y = ax^2 + bx$ $y = ax^2 + c$			$y = -2x^2 + 5$ paràbola convexa (a = - 2) amb vèrtex a (0, 5)

b) Funció de proporcionalitat inversa

Fórmula	Gràfic	Exemple
$y = \frac{k}{x}$ amb $k \in \mathbb{R}$	Hipèrbole a 1r i 3r quadrant si k>0 Decreixent a 2n i 4t quadrant si k<0 Creixent	$y = \frac{2}{x}$ hipèrbole decreixent

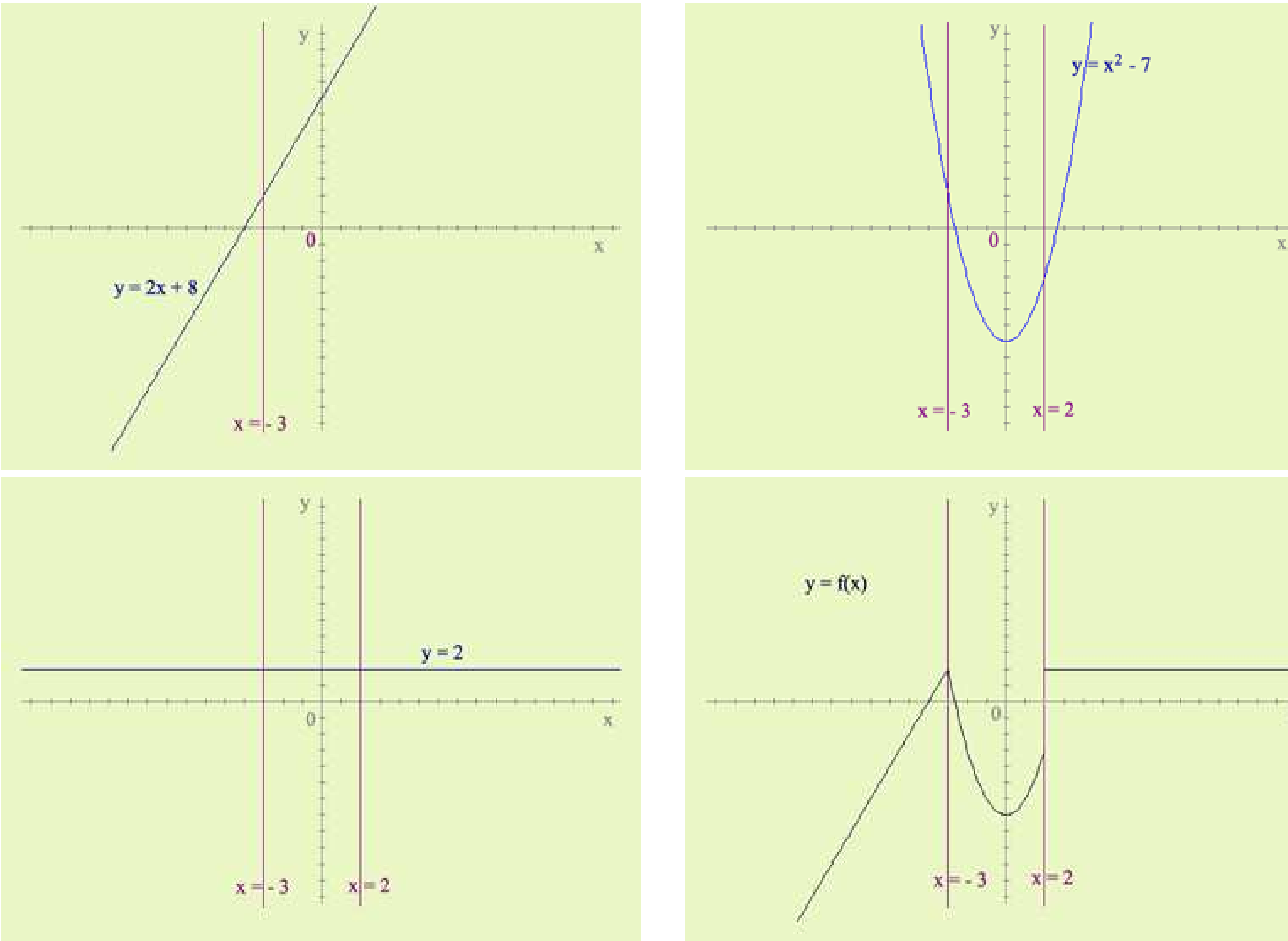
c) Funcions definides a trossos

Són funcions on la fórmula varia segons els intervals del domini.

Ex:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 8 & \text{si} \quad x < -3 \\ x^2 - 7 & \text{si} \quad -3 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$$

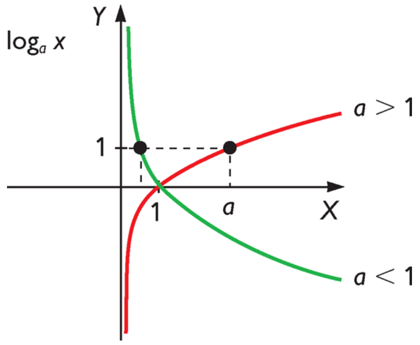
Es tracta de dibuixar cada funció i després mantenir el gràfic en l'interval corresponent



• El domini d'aquestes funcions bé expressat per la unió dels dominis dels diferents trossos.

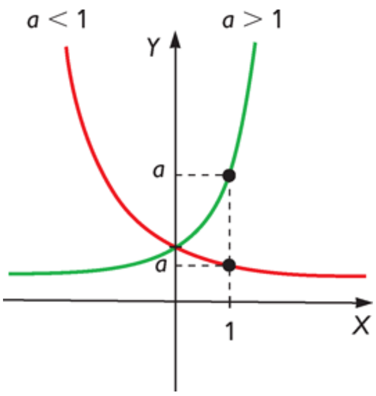
d) Funcions logarítmiques $f(x) = \log_a x$ per $a > 0$

a>1	**Característiques**	**0<a<1**
$(0,+\infty)$	Domini	$(0,+\infty)$
$\mathbb{R}$	Recorregut	$\mathbb{R}$
(1,0)	Punts de tall	(1,0)
No hi ha	Simetria	No hi ha
Si	Continuïtat	Si
Creixent	Creixement/Decreixement	Decreixent



e) Funcions exponencials $f(x) = a^x$ per $a > 0$

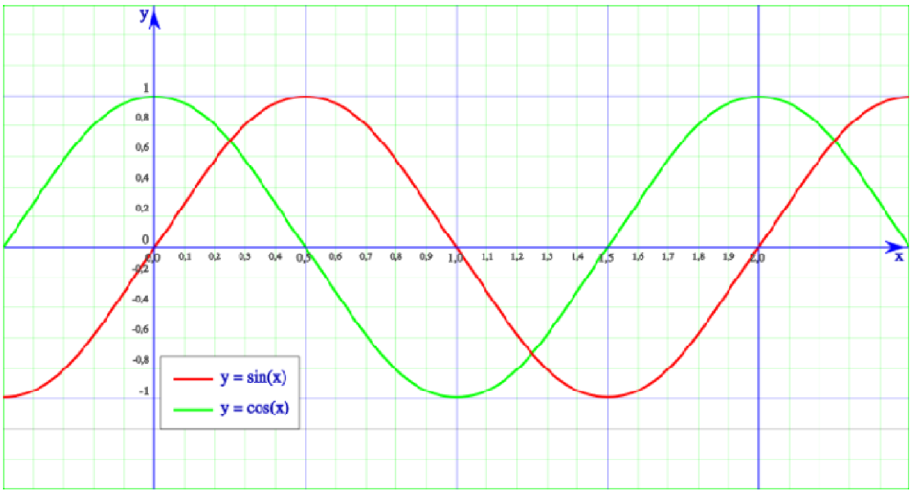
a>1	**Característiques**	**0<a<1**
$\mathbb{R}$	Domini	$\mathbb{R}$
$(0,+\infty)$	Recorregut	$(0,+\infty)$
(0,1)	Punts de tall	(0,1)
No hi ha	Simetria	No hi ha
Si	Continuïtat	Si
Creixent	Creixement/Decreixement	Decreixent



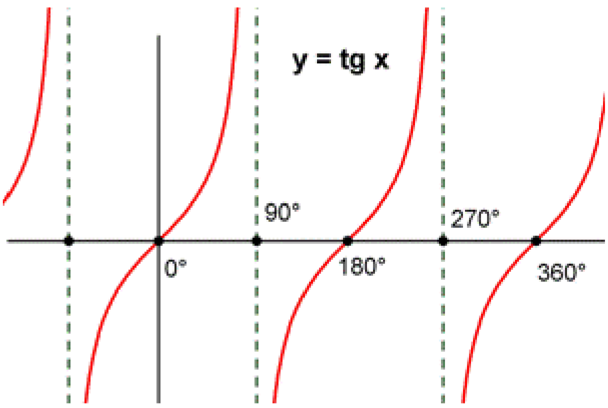
f) <u>Funcions trigonomètriques</u>

Són funcions periòdiques, es a dir, es repeteix el gràfic cada interval del domini.

	y=sinx	**y=cosx**
Domini	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Recorregut	[-1, 1]	[-1 , 1]
Punts de tall	$(k\pi,0)$ $(0,0)$	$(\frac{\pi}{2}+k\pi,0)$ $(0,1)$
Simetria	senar	Parella
Continuïtat	continua	Continua
Extrems relatius	$M=(\frac{\pi}{2}+k2\pi,1)$ $m=(\frac{3\pi}{2}+k2\pi,-1)$	$M=(k2\pi,1)$ $m=(\pi+k2\pi,-1)$
Periodicitat	$T=2\pi$	$T=2\pi$



No totes les funcions trigonomètriques són continues. Ex: f(x) = tan x



g) <u>Funció valor absolut</u>

La variable es troba en un valor absolut

Ex:

$$f(x) = | x + 1 |$$

• Hem de transformar aquestes funcions en funcions definides a trossos per poder treballar. Els intervals venen definits per aquells valors on l'expressió de dins el valor absolut és igual a 0.

Ex: $f(x) = | x |$

$$x = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

ja que, per exemple, per x = - 2 f(-2) = |-2| = - (-2) = 2

Ex: $f(x) = | x + 2 |$

$$x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2) & x < -2 \\ x+2 & x \geq 2 \end{cases}$$

Ex: $f(x) = | x - 3 | + | x + 1 |$

$$x - 3 = 0 \qquad x = 3$$
$$x + 1 = 0 \qquad x = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} -(x-3) - (x+1) & x < -1 \\ -(x-3) + (x+1) & -1 \leq x \leq 3 \\ (x-3) + (x+1) & 3 < x \end{cases}$$

Translació, contracció i dilatació de funcions

<table>
<tr><td>Funció</td><td></td><td colspan="3">Respecte al gràfic de f(x)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">f(x) ± k</td><td rowspan="2">Desplaçament vertical</td><td>k unitats amunt
f(x)+k</td><td rowspan="2">Recorregut canvia
Punts de tall canvien</td><td rowspan="4">La forma
no canvia</td></tr>
<tr><td>k unitats avall
f(x)-k</td></tr>
<tr><td rowspan="2">f(x ± k)</td><td rowspan="2">Desplaçament horitzontal</td><td>k unitats a l’esquerra
f(x+k)</td><td rowspan="2">Recorregut no canvia
Punts de tall canvien</td></tr>
<tr><td>k unitats a la dreta
f(x-k)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">k·f(x)</td><td>k>1
Dilatació
vertical</td><td colspan="2" rowspan="2">Recorregut canvia
Punts de tall canvien</td><td>El gràfic s’allarga</td></tr>
<tr><td>0<k<1
Contracció
vertical</td><td>El gràfic s’escurça</td></tr>
<tr><td rowspan="2">f(k·x)</td><td>k>1
Contracció
horitzontal</td><td colspan="2" rowspan="2">Recorregut canvia
Punts de tall canvien</td><td>El gràfic
enconlleix</td></tr>
<tr><td>0<k<1
Dilatació
horitzontal</td><td>El gràfic es dilata</td></tr>
</table>

Funció composta

Donades les funcions *f* i *g*, es defineix la funció composta $g \circ f$ i es llegeix *f* composada amb *g*, com:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

De la mateixa manera es defineix $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x) \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow g(f(x))$$

Ex:

$$f(x) = 5x + 3$$
$$g(x) = x^2 + 2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x+3) = (5x+3)^2 + 2$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+2) = 5\cdot(x^2+2) + 3$$

• En general, g o f (x) és diferent de f o g (x)

Funció inversa

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, shift left] & f(x) \arrow[l, shift left, "\boxed{f^{-1}}"] \end{tikzcd}$$

Per trobar la funció inversa s'intercanvia la "x" per la "y"

Ex:

$$f(x) = 4x - 7$$

$$y = 4x - 7 \;\Rightarrow\; y + 7 = 4x \;\Rightarrow\; x = \frac{y+7}{4} \;\Rightarrow\; f^{-1}(x) = \frac{x+7}{4}$$

Observacions:

- Els gràfics de $f^{-1}(x)$ i $f(x)$ són simètrics respecte a la bisectriu del 1r i 3r quadrant
- $f \circ f^{-1} = x$
$f^{-1} \circ f = x$

ANNEX 2. **LÍMITS DE FUNCIONS**

Límit d'una funció en un punt

$\lim_{x \to c} f(x)$ és el comportament de la funció f (valor de y) quan x s'aproxima a c.

• Els límits $\lim_{x \to c^-} f(x)$ i $\lim_{x \to c^+} f(x)$, s'anomenen *límits laterals* de la funció f(x)

$$\text{Si } \exists \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L \Rightarrow \exists \lim_{x \to c} f(x) = L$$
$$\text{Si } \lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to c} f(x)$$

Càlcul de límits

i) En un punt
ii) En l'infinit

i) En un punt

a) Substitució. Es substitueix la x per a
Ex:

$$\lim_{x \to 2} 3^{\frac{x-1}{x}} = 3^{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{3}$$

b) Indeterminació $\frac{0}{0}$.

Quan substituïm la x per a de vegades apareix la indeterminació $\frac{0}{0}$.

En aquests casos: factoritzem numerador i denominador, simplifiquem i substituïm

Ex:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2+5x-24}{x^3+6x^2-19x-24} =$$
$$= \lim_{x \to 3} \frac{3^2+5 \cdot 3-24}{3^3+6 \cdot 3^2-19 \cdot 3-24} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2+5x-24}{x^3+6x^2-19x-24} =$$
$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+8)}{(x+1)(x-3)(x+8)} =$$
$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

c) Indeterminació $\infty - \infty$

Es fa la resta i després es substitueix

Ex:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3}{x^2-4}-\frac{2x}{x^2-x-2}=\frac{3}{0}-\frac{4}{0}=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3}{(x-2)(x+2)}-\frac{2x}{(x-2)(x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x+1)}{(x-2)(x+2)(x+1)}-\frac{2x(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2x^2+3x-1}{(x-2)(x+2)(x+1)}=\frac{1}{0}=\infty$$

ii. En l'infinit

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=a$ on

a = 0 si grau Q(x) > grau P(x)

a = ∞ si grau Q(x) < grau P(x)

a = $\frac{a}{b}$ si grau Q(x) = grau P(x)

(on a i b són els coeficients que acompanyen a la x amb el màxim exponent)

Ex:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^3-1}=0$$

Ex:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{4x^5+x}=\frac{1}{4}$$

b) Indeterminació $\infty - \infty$

Hem de diferenciar dos casos:

- Fraccions algebraiques
- Arrels

- Fraccions algebraiques. Hem de fer la resta i calcular el límit

Ex:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2}{x^2-1} - \frac{x^2+1}{x+1} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x^2+1}{x+1} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2}{x^2-1} - \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+3}{x^2-1} = 1$$

- Arrels. Multipliquem i dividim pel conjugat

Ex:

$$\lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2-4x+8} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2-4x+8})(x+\sqrt{x^2-4x+8})}{(x+\sqrt{x^2-4x+8})} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2+4x-8}{(x+\sqrt{x^2-4x+8})} = \frac{4}{1+1} = \frac{4}{2}$$

c) $\lim_{x\to\infty} [P(x)]^{Q(x)} = a^{\infty}$

si a > 1 $\quad \lim_{x\to\infty} [P(x)]^{Q(x)} = \infty$

si a < 1 $\quad \lim_{x\to\infty} [P(x)]^{Q(x)} = 0$

si a = 1 $\quad \lim_{x\to\infty} [P(x)]^{Q(x)} = 1^{\infty}$

Ex:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^x = \infty$$

Indeterminació 1^{∞}

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{Kx}=e^{k}$$

$$\lim_{x\to P(x)}(1+\frac{1}{P(x)})^{P(x)}=e$$

Ex:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+5}{2x-1})^{\frac{3x^2-2}{x-1}}=1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+5}{2x-1})^{\frac{3x^2-2}{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2x+5}{2x-1}-1)^{\frac{3x^2-2}{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{6}{2x-1})^{\frac{3x^2-2}{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{6}{2x-1})^{\frac{2x-1}{6}}]^{\frac{6}{2x-1}\cdot\frac{3x^2-2}{x-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{2x-1}\cdot\frac{3x^2-2}{x-1}}=e^{9}$$

També es pot fer servir la fórmula $\lim\limits_{\substack{x\to\pm\infty\\x\to a}}\left(f(x)\right)^{g(x)}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to\pm\infty\\x\to a}}\left(f(x)-1\right)\cdot g(x)}$

Ex:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-5}{2x^2}\right)^{\frac{3x^2-5}{x}}=\left(\frac{2}{2}\right)^{+\infty}=1^{\infty}\text{ Indeterminació}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-5}{2x^2}\right)^{\frac{3x^2-5}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-5}{2x^2}-1\right)\cdot\frac{3x^2-5}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-5-2x^2}{2x^2}\right)\cdot\frac{3x^2-5}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-5x^2+25}{2x^3}\right)}=e^{0}=1$$