Tema 2: POLINOMIS

Polinomi

Anomenem polinomi en "x" de grau "n" a una expressió del tipus

$$P_{(x)} = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \ldots + a_n$$

on

$n \in$ N (nombre natural)
$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ són coeficients reals
a_n terme independent

• Classificació

a) nombre de termes
   - Monomi (un terme). Ex: $P_{(x)} = x^2$
   - Binomi (dos termes). Ex: $Q_{(x)} = x^5 + 7\,x^3$
   - Polinomi (tres o més termes). Ex : $R_{(x)} = x^2 + x^3 - 3x$

b) grau d'un polinomi. Correspon amb el major grau que presenta la x
   Ex:

$P_{(x)} = x^2 + 3x - 4$	grau 2
$R_{(x)} = 3$	grau 0
$Q_{(x)} = x^5 + 7\,x^3 - 2$	grau 5

•Valor numèric d'un polinomi, és el nombre que s'obté en substituir la x pel nombre indicat

Ex: valor numèric de $P_{(x)} = x^2 + 3x - 4$ per x = 2

$$P_{(2)} = 2^2 + 3.2 - 4$$
$$P_{(2)} = 6$$

Binomi de Newton

Ens permet desenvolupar la potència del binomi (a + b)^n

Si desenvolupem les potències de (a+b)

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

observem que els coeficients surten de la seqüència

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Aquest és el triangle de Tartaglia. Cadascun d'aquests nombres correspon al valor d'un nombre combinatori

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

on

$$\binom{m}{n} = \frac{m.(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}$$

Ex:

$$\binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{3.2.1} = 10$$

Per escriure la potència d'un binomi utilitzem el Binomi de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

o

$$(a+b)^n = \sum_{h=0}^{h=n}\binom{n}{h}a^{n-h}b^h$$

<u>Operacions amb polinomis</u>

a) Suma.
   - Agrupem termes
   - Sumem els termes del mateix grau. Per això posem els polinomis un sobre l'altre fent coincidir en columnes els termes semblants

Ex:

$P_{(x)} = 3x^4 - 5x^2 + 7x$
$Q_{(x)} = x^3 + x^2 - 11x + 3$

$$\begin{array}{lr} & 3x^4 \qquad - 5x^2 + 7x \\ & x^3 + x^2 - 11x + 3 \\ \hline P_{(x)} + Q_{(x)}: & 3x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 3 \end{array}$$

b) Resta

- per calcular $P_{(x)} - Q_{(x)}$ sumem a $P_{(x)}$ l'oposat de $Q_{(x)}$ (els termes del polinomi canviats de signe)

Ex:

$P_{(x)} = 3x^4 - 5x^2 + 7x$
$Q_{(x)} = x^3 + 3x^2 - x + 3$

$$\begin{array}{lr} P_{(x)} & 3x^4 \qquad - 5x^2 + 7x \\ - Q_{(x)} & -x^3 - 3x^2 + x - 3 \\ \hline P_{(x)} - Q_{(x)}: & 3x^4 - x^3 - 8x^2 + 8x + 3 \end{array}$$

c) Producte

- es multiplica terme a terme i s'agrupen els resultats del mateix grau

Ex:

$P_{(x)} = 5x + 11$
$Q_{(x)} = x3 + 2x2 + 4$

$P_{(x)} \cdot Q_{(x)} = (5x + 11)\,(x^3 + 2x^2 + 4)$
$P_{(x)} \cdot Q_{(x)} = 5x^4 + 10x^3 + 20x + 11x^3 + 22x^2 + 44$
$P_{(x)} \cdot Q_{(x)} = 5x^4 + 21\,x^3 + 22x^2 + 20x + 44$

d) Divisió

En dividir $P_{(x)} : Q_{(x)}$ s'obté un quocient $C_{(x)}$ i un residu $R_{(x)}$ de forma que $P_{(x)} = Q_{(x)} \,.\, C_{(x)} + R_{(x)}$

Ex:

$P_{(x)} = 5x3 + 7x2 - 3$
$Q_{(x)} = x2 + 2x - 1$

$P_{(x)} : Q_{(x)}$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
5x^3 & +7x^2 & +0x & -3 & x^2+2x-1 \\ \cline{5-5}
-5x^3 & -10x^2 & +5x & & 5x-3 \\ \cline{1-3}
 & -3x^2 & +5x & -3 & \\
 & +3x^2 & +6x & -3 & \\ \cline{2-4}
 & & 11x & -6 &
\end{array}
$$

- Regla de Ruffini. S'aplica quan el divisor és (x ± a).

Ex: ($x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$) : (x – 1)

Es copien en la part superior d'un requadre els coeficients del dividend de forma ordenada posant 0 en aquells casos en els que no hi ha terme

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\
 & & & & & \\ \hline
 & & & & &
\end{array}
$$

i es posa la *a* canviada de signe a l'altre banda, en aquest cas 1

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\
1 & & & & & \\ \hline
 & & & & &
\end{array}
$$

el primer coeficient es copia a sota

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\
1 & & & & & \\ \hline
 & 1 & & & &
\end{array}
$$

es multiplica el coeficient sota la línea per la *a* canviada de signe i el resultat es col·loca sota el segon coeficient (1 x 1 = 1)

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\
1 & & 1 & & & \\ \hline
 & 1 & & & &
\end{array}
$$

ara es sumen els nombres en columna i es posa el resultat a sota (- 4 + 1 = - 3)

	1	- 4	-1	16	- 12
1		1			
	1	- 3			

es repeteix el procediment (1 x (- 3) = -3)

	1	- 4	-1	16	- 12
1		1	-3		
	1	- 3			

i es suma

	1	- 4	-1	16	- 12
1		1	-3		
	1	- 3	-4		

si continuem queda

	1	- 4	-1	16	- 12
1		1	-3	- 4	12
	1	- 3	-4	12	$\boxed{0}$

l'últim nombre que separem de la resta és el residu (en aquest cas la divisió és exacte perquè dona 0), i la resta de nombres són els coeficients del resultat

$$1\,x^3 - 3\,x^2 - 4\,x + 12$$

Observem que el resultat sempre és un grau inferior al dividend

Teorema del residu

El residu d'una divisió d'un polinomi $P_{(x)}$ per un binomi (x $\pm$ a) és el valor numèric del polinomi per x = $\mp$ a

Ex: El residu de la divisió

$$3x^4 - 5x^2 + 3x - 20 \;:\; (x - 2)$$

és $P_{(2)} = 3.\,2^4 - 5.\,2^2 + 3.\,2 - 20 = 14$

Descomposició factorial d'un polinomi

Diem que a és arrel d'un polinomi $P(x)$ si $P_{(a)} = 0$.

En aplicar el teorema del residu, si a és una arrel del polinomi P(x) és que P(x) és divisible per x-a, en fer la divisió s'obtindrà un quocient C(x) tal que

$$P(x) = C(x) \cdot (x - a)$$

Si continuem el procediment i busquem arrels per C(x) arribem a

$$P_{(x)} = a_0\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.\,.\,.\,(x - x_n)$$

on x_1, x_2, … són arrels del polinomi

• Per descomposar factorialment s'aplica la regla de Ruffini, on es prova com arrels els divisors del terme independent

Ex:

$$P_{(x)} = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$$

Per començar provarem amb 1 que és divisor de 12

$$P_{(1)} = 1^4 - 6.1^3 + 9.1^2 + 4.1 - 12 = -4$$

com dona diferent de 0 P(x) no és divisible per (x – 1)

Per -1

$$P_{(-1)} = (-1)^4 - 6.(-1)^3 + 9.(-1)^2 + 4.(-1) - 12 = 0$$

que resulta ser arrel, fem la divisió per Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -6 & 9 & 4 & -12 \\ -1 & & -1 & 7 & -16 & 12 \\ \hline & 1 & -7 & 16 & -12 & 0 \end{array}$$

$$P_{(x)} = (x + 1)(x^3 - 7x^2 + 16x - 12)$$

$$C_{(x)} = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$$

$$C_{(-1)} = (-1)^3 - 7(-1)^2 + 16(-1) - 12 = -36 \qquad \text{no}$$

$C_{(2)} = (2)^3 - 7(2)^2 + 16(2) - 12 = 0$ si

per la regla de Ruffini, dividim C(x) per x + 2 i obtenim $x^2 - 5x + 6$

$$P_{(x)} = (x+1)\underbrace{(x-2)(x^2-5x+6)}_{C\,(\,x\,)}$$

Ara per descomposar el resultat obtingut podem fer Ruffini o l'equació de segon grau

$$x^2 - 5x + 6$$

$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

$$P_{(x)} = (x+1)(x-2)\,(x-2)\,(x-3)$$

- Aplicacions:
  - Resolució d'equacions amb una incògnita
  - Simplificació de fraccions algebraiques
  - Suma i resta de fraccions algebraiques

a) Resolució d'equacions amb una incògnita.
  - Traiem factor comú
  - Descomposem factorialment
  - Igualem a 0 cada factor, algunes de les solucions són les arrels

Ex:

$x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 26x^2 - 24x = 0$
$x\,(\,x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 26x - 24\,) = 0$

	1	6	3	-26	-24
2		2	16	38	24
	1	8	19	12	0
-3		-3	-15	-12	
	1	5	4	0	

$x^2 + 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = -4 \text{ i } -1$$

$x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 26x^2 - 24x = 0$
$x\,(x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 26x - 24) = 0$
$x\,(x - 2)\,(x^3 + 8x^2 + 19x + 12) = 0$
$x\,(x - 2)\,(x + 3)\,(x^2 + 5x + 4) = 0$
$x\,(x - 2)\,(x + 3)\,(x + 1)\,(x + 4) = 0$

Solucions: 0, 2, -3, -1 i -4

b) Simplificació de fraccions algebraiques
- descomposem factorialment numerador i denominador
- "eliminem" els factors que es repeteixen

Ex:

$$\frac{x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12}{x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 26x^2 - 24x} = \frac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}\,(x-2)\,(x-3)}{x\,\cancel{(x-2)}(x+3)\cancel{(x+1)}(x+4)} =$$

$$= \frac{(x-2)\,(x-3)}{x\,(x+3)\,(x+4)}$$

c) Suma i resta de fraccions algebraiques. Es fa com la suma i resta de fraccions per la qual cosa cal trobar el m.c.m dels denominadors, que actuarà com denominador nou

Ex:

$$\frac{2}{x-1} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{2 \cdot (x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x+1}{x^2-1}$$