

TEMA 3 : Funció Exponencial i Logarítmica

Activitats

1. Simplifiqueu:

- a) $x^4 \cdot x^3$
- b) x^4 / x^3
- c) $(x^3)^6$
- d) $3^x \cdot 3^{2x}$
- e) $5^x / 5^{3x}$
- f) $(2^x)^{2x}$

2. Resol les equacions exponencials següents:

- a) $3^{2-x} = 9$
- b) $5^{3-x} = 125$
- c) $10^{3+x} = 1$
- d) $7^{x^2-4} = 0$
- e) $3^{2x-5} = \frac{1}{243}$
- f) $2^{\frac{x+5}{3}} = \sqrt[4]{2^x}$
- g) $5^{x-2} + 5^x + 5^{x+2} = 651$
- h) $10^{x-2} + 10^{x-4} + 10^{x-2} = 10101$
- i) $2^{2x+4} + 6 \cdot 2^{x+1} - 4 = 0$
- j) $2^{2x+4} - 3 \cdot 2^{x+2} + 2 = 0$
- k) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$
- l) $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$
- m) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$
- n) $4^{2x} = 14^{x-1}$
- o) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-3}$
- p) $5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$
- q) $4 - 3^x = \frac{1}{3^{x-1}}$

3. Fes servir la definició de logaritme i calcula:

- a) $\lg_2 8$
- b) $\lg_2 1024$
- c) $\log_3 243$
- d) $\log_5 125$
- e) $\log_5 \frac{1}{625}$
- f) $\log 10.000$
- g) $\lg_{4/5} 4/5$
- h) $\lg_{10} 1000$
- i) $\lg_3 1/9$
- j) $\lg_3 81$
- k) $\lg_2 1/16$
- l) $\lg_4 64$
- m) $\lg_{1/4} 64$
- n) $\lg_2 32$
- o) $\lg_{2/3} 27/8$
- p) $\lg_{2/3} 4/9$
- q) $\lg_{10} 0,0001$
- r) $\lg_{1/7} 1/49$
- s) $\lg_{325} 1$
- t) $\ln e^3$
- u) $\ln \frac{1}{e^7}$
- v) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = x$
- w) $\log_5 \sqrt{125}$

4. Trobeu la x

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) $\lg_x 81 = 4$ | h) $\lg_x 1/e = -1$ |
| b) $\lg_2 x = 5$ | i) $\ln x = -2$ |
| c) $\lg_7 1/49 = x$ | j) $\lg_x 4 = 1/16$ |
| d) $\lg_3 27 = x$ | k) $\lg_x 9/25 = 2$ |
| e) $\log 100 = x$ | l) $\log x = 4$ |
| f) $\ln e^2 = x$ | m) $\ln 1 = x$ |
| g) $\lg_x 3 = 1$ | n) $\lg_x 3/5 = -1$ |

5. Quines relacions són certes?

- a) $\lg(a + b) = \lg a + \lg b$
- b) $\lg a/b = \lg a - \lg b$
- c) $\lg a / \lg b = \lg(a - b)$
- d) $\lg a^b = b \cdot \lg a$
- e) $\lg(ab)^c = c \lg a + c \lg b$

6. Expressen aplicant les propietats els següents logaritmes en funció de $\log 2$ i $\log 3$

- | | |
|---------------|---------------|
| a) $\log 60$ | e) $\log 40$ |
| b) $\log 75$ | f) $\log 270$ |
| c) $\log 900$ | g) $\log 150$ |
| d) $\log 18$ | h) $\log 8$ |

7. Expressen els següents logaritmes en funció de $\log 9$ i $\log 8$

- | | |
|---------------|----------------|
| a) $\log 72$ | d) $\log 45/4$ |
| b) $\log 900$ | e) $\lg_9 600$ |
| c) $\log 64$ | f) $\lg_8 800$ |

8. Expressen en logaritme decimal

- | | |
|-------------------|----------------|
| a) $\lg_2 3$ | e) $\lg_2 270$ |
| b) $\lg_3 2$ | f) $\lg_3 810$ |
| c) $\lg_{27} 9$ | g) $\lg_5 3$ |
| d) $\lg_{18} 216$ | h) $\ln 5$ |

9. Reduir a un únic logaritme:

- a) $\log 3 a - 7 \log a + 2 \log 10$
- b) $\log 16 - \log a + 32 \log 2$
- c) $4 (\log 3 + \log a - 2 \log b)$
- d) $\log x + 9 (\log y + \log x)$

10. Resoleu:

- a) $\log x + 1 = \log 2$
- b) $1 - \log x = \log x$
- c) $\log(3 - x) / \log x = 1$
- d) $2 \log x - 2 = \log x$

- e) $\log x - \log 4 - 2 \log x = 1 - \log x^2$
- f) $\log x^2 - \log x + 11/12 = 3$
- g) $\log x^2 + \log 3x - 1 = 0$
- h) $\log x + \log (x + 10) - \log \sqrt{10x} = \log \sqrt{x + 2}$
- i) $7 \log x + \log x = \log 10$
- j) $\log 1000 = 2 + \log x/10$
- k) $\lg_x a = 21 \lg_{2x} a$

11. Resoleu:

a) $x - y = 30$
 $\log x + \log y = 3$

b) $\log x + \log y - 1 = 0$
 $2 \log x - \log y = 2$

c) $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - y = 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2 \log y - 3 \log x = 1 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

12. Donades les funcions $y = 4^x$ i $y = 4^{-x}$, calcula les imatges de -2, -1, 0, 1, 2 i fes-ne les gràfiques aproximades. Fes una comparació de les gràfiques.

13. Donades les funcions $y = \log_4 x$ i $y = \log_{1/4} x$, calcula les imatges de $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4, 16$ i fes-ne les gràfiques aproximades. Fes una comparació de les gràfiques.

14. Representeu gràficament les següents funcions i indiqueu les seves característiques:

- a) $y = 3^x$
- b) $y = 2^x$
- c) $y = (1/2)^x$
- d) $y = (1/3)^x$
- e) $y = \lg_2 x$
- f) $y = \lg_3 x$
- g) $y = \log x$

Què observeu dels gràfics $y = 3^x$ i $y = \lg x$?

I si compareu $y = 2^x$ i $y = 3^x$? Representeu aproximadament $y = e^x$

Compareu $y = \lg_2 x$, $y = \lg_3 x$ i $y = \log x$, què observeu?. Representeu $y = \ln x$

15. Un bacteri es divideix cada 30 segons en dos nous bacteris, cadascun dels quals es torna a dividir en dos més cada 30 segons i així succesivament.
- la funció $y = 2^{t/30}$ on $t =$ temps (s) ens dona el nombre de bacteris en cada moment?. Raoneu la resposta.
 - quants bacteris hi hauran després de 5 minuts?
 - quant de temps es necessita per tenir 4096 bacteris?

16. Per mesurar l'intensitat dels terratrèmols es fa servir l'escala de Richter, que defineix la magnitud M d'un terratrèmol en funció de l'amplitud A de les ones superficials que ocasiona,

$$M = \log A + C$$

on C és una constant que depèn del període T de les ones enregistrades pel sismògraf i D la distància del sismògraf al epicentre del terratrèmol ($C = 3,3 + 1,6 \log D - \log T$)

Suposem que s'han produït dos terratrèmols en un mateix lloc, un amb magnitud 6 i l'altre amb magnitud 8, i que C és la mateixa, compareu la intensitat de tots dos a través de l'amplitud.

17. Una aplicació del nombre "e" és poder determinar en un assassinat el moment de la mort.

Cal aplicar la llei de Newton sobre el refredament que estableix que la velocitat a la que es refreda un cos és proporcional a la diferència entre la temperatura de l'objecte i la temperatura de l'entorn.

Això vol dir que quan un objecte està molt més calent que l'aire exterior, la seva velocitat de refredament és alta, de manera que es refreda molt ràpidament; quan un cos està una mica més calent que el seu entorn, la seva velocitat de refredament és baixa i es refreda lentament.

Una persona viva no es refreda contínuament. El metabolisme humà assegura el manteniment de la temperatura del cos a l'entorn dels 98,6° F. Però una persona morta deixa de produir calor i, per tant, comença a refredar-se seguint la llei de Newton que s'aplica amb la fórmula matemàtica següent:

$$T = T_{\text{aire}} + (T_{\text{cos}} - T_{\text{aire}}) / e^{k \cdot t}$$

on T és la temperatura del cos, t és el temps en hores després de mitjanit i k és una constant.

Determineu l'hora de l'assassinat d'una persona si sabem que $K = 0,5207$, la seva temperatura en un moment donat després de la seva mort era de 85°F i la temperatura de l'aire era de 68°F.

18. Per determinar d'una manera aproximada l'antiguitat d'un objecte que està format per matèria orgànica es mesura la quantitat de carboni 14 que conté. Els éssers vius tenen una quantitat de carboni 14 constant.

Quan un ésser viu mor aquesta quantitat es va desintegrant. La funció que regula la desintegració es determina amb la següent fórmula:

$$Q = Q_0 \cdot e^{-0,000124 \cdot t}$$

On Q és la quantitat de carboni 14 final, Q_0 és la quantitat de carboni 14 inicial, t és el temps.

Calculeu quina part de C 14 conserva un ésser viu 1000 anys després que hagi mort.

Sabem que la temperatura normal del cos és de 98,6°F, llavors aquest és el moment de la seva mort. Així:

$$98,6^\circ = 68^\circ + (85^\circ - 68^\circ) / e^{0,5207 \cdot t}$$

$$\text{Operant els termes resulta: } (30,6^\circ) \cdot e^{0,5207 \cdot t} = 17^\circ$$

$$e^{0,5207 \cdot t} = 17^\circ / 30,6^\circ = 0,5556$$

Per tant, si apliquem el càlcul de logaritmes resulta:

$$0,5207 \cdot t = L(e^{0,5207 \cdot t}) = L(0,5556) = -0,5878$$

$$t = -0,5878 / 0,5207 = -1,13 \text{ hores} = -68 \text{ minuts}$$

Amb això sabem, gràcies a l'ajuda del nombre e, que aquesta persona va morir 68 minuts abans de les dotze de la nit, és a dir, a les 22:52 h.

