Tema 3: EQUACIONS I INEQUACIONS

Igualtats algebràiques

Es poden diferenciar: identitats i equacions

a) Identitats

Són igualtats que sempre es compleixen, per qualsevol valor que donem a les lletres. Les més importants són els productes notables

Quadrat d'una suma	$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
Quadrat d'una resta	$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
Suma per diferència	$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Ex: $(x + 5)^2 = x^2 + 5^2 + 2\cdot x\cdot 5 = x^2 + 25 + 10x$ on a=x i b=5

b) Equacions.

Són igualtats que només es compleixen per determinats valors numèrics de les variables

• Classificació. Segons:

- el nombre de variables o incògnites (lletres)

Ex: $3x - 2y = 8$ Equació amb dues incògnites

$3 - x^2 = 2 + x$ Equació amb una incògnita

- el major exponent que presenta la variable

Ex: $2 + y^4 + 5y = y^2$ Equació de grau quatre

$5x - 2 = 3x$ Equació de primer grau

Equacions de primer grau amb una incògnita

La resolució consisteix en trobar el valor numèric de la variable pel qual es compleix la igualtat. Hem de:

i) eliminar els parèntesi
ii) eliminar els denominadors
iii) passem tots els termes que tenen incògnita (sola o acompanyada per un coeficient) a un costat de la igualtat i la resta a l'altre. Hem de tenir en compte que en canviar de costat el nombres que estan

sumant	passen	restant
restant	"	sumant
multiplicant	"	dividint , ...

iv) agrupem termes i aïllem la variable

Ex:

$$2x - 8 = 5x + 1$$
$$2x - 5x = 8 + 1$$
$$-3x = 9$$
$$x = \frac{9}{-3}$$

OJO: Només es canvia l'operació de multiplicació per la divisió, no el signe del –3

$$x = -3$$

Ex:

$$2(x - 4) = 3 - x$$
$$2 \cdot x - 2 \cdot 4 = 3 - x$$
$$2x - 8 = 3 - x$$
$$2x + x = 3 + 8$$
$$3x = 11$$
$$x = \frac{11}{3}$$

Ex:

$$2x - \frac{3}{8} = 5 + \frac{x}{12}$$

$8 = 2^3$
$12 = 2^2 \cdot 3$ $\qquad$ $2^3 \cdot 3 = 24$

$$\frac{2x \cdot 24}{24} - \frac{3 \cdot 3}{24} = \frac{5 \cdot 24}{24} + \frac{x \cdot 2}{24}$$

$$2x \cdot 24 - 3 \cdot 3 = 5 \cdot 24 + x \cdot 2$$
$$48x - 9 = 120 + 2x$$
$$48x - 2x = 120 + 9$$
$$46x = 129$$
$$x = \frac{129}{46}$$

- Aplicacions:

La principal aplicació és la resolució de problemes.

Cal recordar que:

-hem d'assignar la incògnita a la dada que em demana el problema. Si em demana més d'una cosa podem relacionar-les entre si

-cal respondre al final allò que em demanen

Ex: En una reunió hi ha 156 persones entre homes, dones i nens. El nombre de dones és el doble que el d'homes, i el de nens el triple de la suma del nombre de dones i d' homes.
Calculeu quantes persones hi ha de cada grup.

Nº d'homes: x
Nº de dones: doble de dones $\rightarrow 2 \cdot x = 2x$
Nº de nens: triple de la suma de dones i homes $\rightarrow$ *triple de* $x + 2x$ $\rightarrow$ *triple de* $3x$ $\rightarrow 3 \cdot 3x \rightarrow 9x$

$$
\begin{aligned}
N^o \text{ homes} + n^o \text{ dones} + n^o \text{ nens} &= 156 \\
x + 2x + 9x &= 156 \\
12x &= 156 \\
x &= 13
\end{aligned}
$$

R: El nombre d'homes és 13, el de dones és de 26, i el de nens 117.

<u>Sistemes d'equacions amb dues incògnites</u>
Es classifiquen segons la solució

$$
\text{Sistemes} \begin{cases} \text{compatibles} \begin{cases} \text{determinats} & \rightarrow \quad \text{una única solució} \\ \text{indeterminats} & \rightarrow \quad \text{moltes solucions} \end{cases} \\ \text{incompatibles} \qquad\qquad\qquad\quad \rightarrow \quad \text{no tenen solució} \end{cases}
$$

Hi ha tres mètodes numèrics de resolució:

a) Substitució. Consisteix en deixar sola una de les variables d'una de les equacions i substituir el resultat obtingut a l'altre equació
Ex:

$$
\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 2 \\ -x + 4y &= -1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 2 \\ 4y + 1 &= x \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} 2(4y + 1) - 3y &= 2 \\ 8y + 2 - 3y &= 2 \\ 5y &= 0 \\ y &= 0 \\[1em] 4y + 1 &= x \\ 4 \cdot 0 + 1 &= x \\ 1 &= x \end{aligned}
$$

Sistema compatible determinat

b) Igualació. Consisteix en deixar sola la mateixa variable de totes dues equacions i igualar els resultats obtinguts.

Ex:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 5 \\ 6y &= 10 - 2x \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= 5 - 3y \\ x &= \frac{10-6y}{2} = 5 - 3y \end{aligned}\right\}$$

$$5 - 3y = 5 - 3y$$
$$3y - 3y = 5 - 5$$
$$0y = 0 \qquad y = \text{qualsevol nombre}$$

$$x = \text{un nombre igual a } 5\text{-}3y$$

Sistema compatible indeterminat

c) Reducció. Consisteix en multiplicar una o les dues equacions pel (pels) nombre (s) convenients, de manera que en sumar totes dues equacions una de les variables quedi anul·lada.

Ex:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ -x + y &= -1 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{matrix} \\ x\,2 \end{matrix} \quad \left.\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ -2x + 2y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

$$/ \qquad y = 2$$

$$2x - y = 4$$
$$x = 3$$

Sistema compatible determinat

Ex :

$$\left.\begin{aligned} -3x + y &= 2 \\ -6x + 2y &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{matrix} x(-2) \\ \\ \end{matrix} \quad \left.\begin{aligned} 6x - 2y &= -4 \\ -6x + 2y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$/ \qquad / \quad = -3$$

$$0 = -3$$

Sistema incompatible

• La representació gràfica de les equacions com rectes ens permet solucionar el sistema

• Aplicació
Ex: En una granja tenim 25 animals entre gallines i conills. Si tenim 80 potes, quants animals tenim de cada tipus?

x = nº de gallines
y = nº de conills

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 25 \\ 2x + 4y &= 80 \end{aligned}\right\}$$

$$x(-2)\quad \left.\begin{aligned} -2x - 2y &= -50 \\ 2x + 4y &= 80 \end{aligned}\right\}$$

$$/ \quad 2y = 30$$

$$y = 15$$
$$x = 10$$

R: Tenim 15 conills i 10 gallines

<u>Sistemes d'equacions no lineals</u>
És un sistema format per dues o més equacions on alguna d'elles no lineal, per exemple, una equació de grau major a 1, amb fraccions algebraiques o amb radicals.

Ex:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 17$$
$$2x + 2y = 46$$

$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+y^2})^2 = 17^2 \\ x + y = 23 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2 = 289 \\ x + y = 23 \quad \rightarrow \quad y = 23 - x \end{cases}$$

$$x^2 + (23-x)^2 = 289$$
$$x^2 + 23^2 - 2{\cdot}23{\cdot}x + x^2 = 289$$
$$2x^2 - 46x + 240 = 0$$
$$x^2 - 23x + 120 = 0$$
$$x = \frac{-(-23) \pm \sqrt{(-23)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}120}}{2.1} = \begin{matrix} 8 \\ 15 \end{matrix}$$

$$x = 8 \quad \rightarrow \quad y = 23 - 8 = 15$$
$$x = 15 \quad \rightarrow \quad y = 23 - 15 = 8$$

Equació de segon grau amb una incògnita

Ex:

$x - 3 = x^2$
$2x^2 - x = 3x$

Per resoldre una equació de segon grau amb una incògnita
- traiem parèntesi
- traiem denominadors
- agrupem termes
- passem tot a un costat de la igualtat fins obtenir una expressió

$a\,x^2 + b\,x + c = 0$ on a, b, c són nombres

- Podem tenir:

a) **Equacions completes** $a\,x^2 + b\,x + c = 0$

Apliquem la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observació: l'expressió $b^2 - 4ac$ s'anomena discriminant (Δ)
- si $\Delta > 0$ hi ha dues solucions
- si $\Delta = 0$ hi ha una solució
- si $\Delta < 0$ no té solució

b) **Equacions incompletes**

$a\,x^2 + b\,x = 0$

Podem aplicar la fórmula o treure factor comú la x

$$a\,x^2 + b\,x = 0$$

$$x\,(ax + b) = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ ax + b = 0 \qquad x = \dfrac{-b}{a} \end{array} \right.$$

$a\,x^2 + c = 0$

Podem aplicar la fórmula o deixar sola la x

$$a\,x^2 + c = 0$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Ex:

$2x^2 = 3x$

$2x^2 - 3x = 0$

$x\,(2x - 3) = 0$

$x = 0$

$2x - 3 = 0$

$x = \frac{3}{2}$

Ex:

$4x^2 + 8 = 0$

$4x^2 = -8$

$x^2 = -2$

$x = \sqrt{-2}$

No té solució

<u>Equacions biquadrades</u>

Són equacions del tipus $a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0$

Per resoldre fem un canvi de variable $t = x^2$,

$$a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0$$
$$\Big\downarrow x^2 = t$$
$$a\,t^2 + b\,t + c = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$t_1 \qquad x = \pm\sqrt{t_1}$

$t_2 \qquad x = \pm\sqrt{t_2}$

Ex:

$3\,x^4 = 10 - 13\,x^2$

$3\,x^4 + 13\,x^2 - 10 = 0$

$$\Big\downarrow x^2 = t$$

$3t^2 + 13t - 10 = 0$

$$t = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10)}}{2 \cdot 3} =$$

$\frac{4}{6}$ $\qquad x = \pm \sqrt{\frac{4}{6}}$

-5 $\qquad x = \sqrt{-5}$

(No té solució)

<u>Equacions irracionals</u>

Són equacions on la variable o incògnita es troba dins d'arrel

Ex:

$$\sqrt{x+1} = 3x$$

Podem tenir:

a) una sola arrel

- separem l'arrel de la resta a costats diferents de la igualtat
- agrupem termes
- elevem al quadrat tots dos costats de la igualtat
- resolem l'equació

Ex:

$\sqrt{2x-1} - 2x = 1$

$\sqrt{2x-1} = 1 + 2x$

$(\sqrt{2x-1})^2 = (1 + 2x)^2$

$\downarrow (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$

$2x - 1 = 1 + 4x^2 + 4x$

$0 = 4x^2 + 2x + 2$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 4}$ $\qquad$ *No té solució*

b) dues o més arrels

- separem les arrels a costats diferents de la igualtat
- elevem al quadrat tots dos costats de la igualtat
- si queden encara arrels repetim el procediment fins aplicar l'apartat anterior
- solucionem l'equació

Ex:

$$3 - \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = 0$$
$$3 - \sqrt{x} = \sqrt{x-1}$$
$$(3 - \sqrt{x})^2 = (\sqrt{x-1})^2$$
$$\Big\downarrow \quad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$9 + x - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x} = x - 1$$
$$10 = 6\sqrt{x}$$
$$10^2 = (6\sqrt{x})^2$$
$$100 = 36x$$
$$x = \frac{25}{9}$$

Equacions exponencials

Són aquelles en què la incògnita apareix a l'exponent

$$a^{f(x)} = b$$

No hi ha una única manera de solucionar aquestes equacions, però en general, podem diferenciar:

a) "immediates"
b) les potències tenen la mateixa base
c) les potències tenen com a base dos nombres diferents on un d'ells és el quadrat de l'altre

a) "immediates"

Ex:

$$2^{x-3} = 32$$
$$2^{x-3} = 2^5$$
$$x - 3 = 5$$
$$x = 8$$

b) potències amb la mateixa base, utilitzem les propietats de les potències fins obtenir una de "immediata"

Ex:

$$2^x + 3 \cdot 2^{x-1} = 80$$
$$2^x + 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-1} = 80$$
$$2^x + 3 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2} = 80$$
$$2^x \left(1 + \frac{3}{2}\right) = 80$$
$$2^x \cdot \frac{5}{2} = 80$$

$$2^x = \frac{80 \cdot 2}{5}$$
$$2^x = 32$$
$$x = 5$$

c) potències amb bases on una és el quadrat de l'altre. En aquest cas substituïm a^x per t i treballem com en una equació de segon grau; posteriorment calculem x

Ex:

$$4^x + 3 \cdot 2^x = 88$$
$$(2^2)^x + 3 \cdot 2^x = 88$$
$$(2^x)^2 + 3 \cdot 2^x = 88$$
$$\Big\downarrow \; t = 2^x$$
$$t^2 + 3t = 88$$
$$t^2 + 3t - 88 = 0$$
$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-88)}}{2 \cdot 1} = \begin{matrix} 8 \\ -11 \end{matrix}$$

$2^x = 8 \quad \rightarrow \quad x = 3$

$2^x = -11 \quad \rightarrow \quad$ No té solució

Equacions logarítmiques

Són aquelles en què la incògnita està afectada per un logaritme.

Per resoldre aquestes equacions s'han d'aplicar les propietats dels logaritmes fins obtenir

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

per després igualar $f(x) = g(x)$

Ex:

$$\log(116 - x^2) - 2\log(x - 1) = 1$$
$$\log(116 - x^2) - \log(x - 1)^2 = 1$$
$$\log(116 - x^2) : (x - 1)^2 = \log 10$$
$$(116 - x^2) : (x - 1)^2 = 10$$
$$116 - x^2 = 10(x - 1)^2$$
$$116 - x^2 = 10(x^2 - 2x + 1)$$
$$116 - x^2 = 10x^2 - 20x + 10$$
$$0 = 11x^2 - 20x - 106$$

$x = 4$

$x = -24/11$ solució no vàlida ja que $\log(-24/11 - 1)$ no existeix

Inequacions

És una desigualtat formada per dues expressions algebraiques separades per un dels signes >, <, ≥ o ≤

a) **Inequacions de primer grau amb una incògnita.**

Es resol com l'equació de primer grau però amb una diferència: en el últim pas, quan deixem sola la incògnita, si el nombre que acompanya la variable és negatiu i està multiplicant o dividint, al passar a l'altre costat, es canvia el signe de la desigualtat.

Ex:

$$2-\left[-2\cdot(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]\leq\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

$$2-\left(-2x-2-\frac{x-3}{2}\right)\leq\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

$$2+2x+2+\frac{x-3}{2}\leq\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

$$24+24x+24+6\cdot(x-3)\leq 8x-(5x-3)+36x$$

$$24+24x+24+6x-18\leq 8x-5x+3+36x$$

$$24x+6x-8x+5x-36x\leq 3-24-24+18$$

$$-9x\leq -27$$

$$9x\geq 27$$

$$x\geq 3$$

$[3, +\infty)$

b) Inequacions de segon grau amb una incògnita.

- Passem tot a un costat de la desigualtat fins obtenir una expressió

$$ax^2 + bx + c > 0$$

- Es resol l'equació de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$ i es troben les solucions o arrels x_1 i x_2.
- Representem aquests valors en la recta real, la qual queda dividida en tres intervals. Agafem un punt qualsevol de cada interval i comprovem si es compleix la desigualtat, si es compleix tot l' interval és solució de la inequació.

Ex:

$$x^2 - 6x + 8 > 0$$

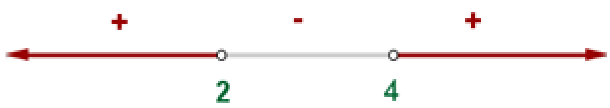
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$P(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 > 0$$

$$P(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 17 - 18 < 0$$

$$P(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 8 = 33 - 30 > 0$$



$$S = (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$$

- Si l'equació no te solució, agafem un valor qualsevol,
  - si es compleix la inequació la solució són tots els nombres reals |R
  - si no es compleix no hi ha solució

c) **Inequaciones racionales**

Es resolen d'una forma semblant a les de segon grau tenint en compte que el denominador no pot ser zero

- Trobem les arrels del numerador i del denominador
- Representem els valors en la recta real. Com el denominador no pot ser igual a zero les arrels del denominador no poden ser solució de la inequació.
- Agafem un punt de cada interval i comprovem si compleix la inequació

Ex:

$$\frac{x-2}{x-4} \geq 0$$

$x - 2 = 0 \qquad x = 2$

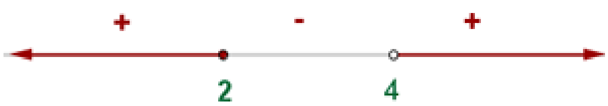
$x - 4 = 0 \qquad x = 4$

$$\frac{x-2}{x-4} \geq 0 \qquad x \neq 4$$

$x = 0 \qquad \frac{0-2}{0-4} > 0$

$x = 3 \qquad \frac{3-2}{3-4} < 0$

$x = 5 \qquad \frac{5-2}{5-4} > 0$



$S = (-\infty, 2] \cup (4, \infty)$

d) Sistemes d'inequacions amb una incògnita.

Es resol cada equació per separat, la solució és la intersecció de solucions.

Ex:

$$\begin{cases} 2x+3\geq 1 \\ -x+2\geq -1 \end{cases}$$

$2x+3\geq 1$ $\quad$ $2x\geq 1-3$ $\quad$ $2x\geq -2$ $\quad$ $x\geq -1$

$-x+2\geq -1$ $\quad$ $-x\geq -1-2$ $\quad$ $-x\geq -3$ $\quad$ $x\leq 3$

$[-1, 3]$