Tema 3: EQUACIONS I INEQUACIONS

Igualtats algebraiques
Es poden diferenciar: identitats i equacions

a) Identitats
Són igualtats que sempre es compleixen, per qualsevol valor numèric que donem a les lletres. Un exemple són els productes notables

Quadrat d'una suma	$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
Quadrat d'una resta	$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
Suma per diferència	$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Ex: $(x + 5)^2 = x^2 + 5^2 + 2\cdot x\cdot 5 = x^2 + 25 + 10x$ on a=x i b=5

b) Equacions.
Són igualtats que només es compleixen per determinats valors numèrics de les variables
Es classifiquen segons:

- el nombre de variables o incògnites (lletres)

Ex:	$3x - 2y = 8$	Equació amb dues incògnites
	$3 - x^2 = 2 + x$	Equació amb una incògnita

- el major exponent que presenta la variable

Ex:	$2 + y^4 + 5y = y^2$	Equació de grau quatre
	$5x - 2 = 3x$	Equació de primer grau

Equacions de primer grau amb una incògnita
Són equacions amb una sola variable elevada a 1.

La resolució consisteix en trobar el valor numèric de la variable pel qual es compleix la igualtat. Hem de:

i) eliminar els parèntesi, si hi ha
ii) eliminar els denominadors, si hi ha
iii) passem tots els termes que tenen incògnita (sola o acompanyada per un coeficient) a un costat de la igualtat i la resta a l'altre. Hem de tenir en compte que en canviar de costat el nombres que estan

sumant	passen	restant
restant	"	sumant
multiplicant	"	dividint , ...

iv) agrupem termes i aïllem la variable

Ex:

$$2x - 8 = 5x + 1$$
$$2x - 5x = 8 + 1$$
$$-3x = 9$$
$$x = \frac{9}{-3}$$

OJO: Només es canvia l'operació de multiplicació per la divisió, no el signe del –3

$$x = -3$$

Ex:

$$2(v - 4) = 3 - v$$
$$2 \cdot v - 2 \cdot 4 = 3 - v$$
$$2v - 8 = 3 - v$$
$$2v + v = 3 + 8$$
$$3v = 11$$
$$v = \frac{11}{3}$$

Ex:

$$2e - \frac{3}{8} = 5 + \frac{e}{12}$$

$$\left.\begin{array}{l} 8 = 2^3 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \end{array}\right\} \quad \text{m.c.m} = 2^3 \cdot 3 = 24$$

$$\frac{2e \cdot 24}{24} - \frac{3 \cdot 3}{24} = \frac{5 \cdot 24}{24} + \frac{e \cdot 2}{24}$$
$$2e \cdot 24 - 3 \cdot 3 = 5 \cdot 24 + e \cdot 2$$
$$48e - 9 = 120 + 2e$$
$$48e - 2e = 120 + 9$$
$$46e = 129$$
$$e = \frac{129}{46}$$

Equació de segon grau amb una incògnita

Hi ha una variable elevada a 2

Ex:

$$z - 3 = z^2$$
$$2x^2 - x = 3x$$

Per resoldre una equació de segon grau amb una incògnita

- traiem parèntesi
- traiem denominadors
- agrupem termes
- passem tot a un costat de la igualtat fins obtenir una expressió

$$a x^2 + b x + c = 0 \qquad \text{on a, b, c són nombres}$$

- Podem tenir:

a) **Equacions completes** $ax^2 + bx + c = 0$

Apliquem la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observació: l'expressió $b^2 - 4ac$ s'anomena discriminant (Δ)
- si $\Delta > 0$ hi ha dues solucions
- si $\Delta = 0$ hi ha una solució
- si $\Delta < 0$ no té solució

b) **Equacions incompletes**

$ax^2 + bx = 0$

Podem aplicar la fórmula o treure factor comú la x

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \qquad x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

$ax^2 + c = 0$

Podem aplicar la fórmula o deixar sola la x

$$ax^2 + c = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Ex:

$2x^2 = 3x$

$$2x^2 - 3x = 0$$

$$x(2x - 3) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3 = 0 \qquad x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Ex:

$$4e^2 + 8 = 0$$

$$4e^2 = -8$$
$$e^2 = -2$$
$$e = \sqrt{-2}$$

No té solució

Equacions biquadrades

Són equacions del tipus

$$a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0$$

Per resoldre-les fem un canvi de variable $t = x^2$,

$$a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0 \;\xrightarrow{x^2 = t}\; a\,t^2 + b\,t + c = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} t_1 & x = \pm\sqrt{t_1} \\ t_2 & x = \pm\sqrt{t_2} \end{cases}$$

Ex:

$$3\,x^4 = 10 - 13\,x^2$$
$$3\,x^4 + 13\,x^2 - 10 = 0 \;\xrightarrow{x^2 = t}\; 3\,t^2 + 13\,t - 10 = 0$$

$$t = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10)}}{2 \cdot 3} = \begin{cases} \frac{4}{6} & x = \pm\sqrt{\frac{4}{6}} \\ -5 & x = \sqrt{-5} \end{cases}$$

(No té solució)

Equacions de grau major que 2 amb una incògnita
Són equacions amb una variable amb exponent major a dos.

Per resoldre-les,
- passem tots els termes a un costat de la igualtat;
- descomposem factorialment el polinomi;
- igualem a 0 cada factor

Ex: Resoleu $x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 26x^2 = 6x(4 - x^3)$

$$x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 26x^2 = 6x(4 - x^3)$$
$$x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 26x^2 = 24x - 6x^4$$
$$x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 26x^2 - 24x = 0$$

	1	6	3	-26	-24
-1		-1	-5	2	24
	1	5	-2	-24	0
2		2	14	24	
	1	7	12	0	
-3		-3	-12		
	1	4	0		

$$x(x-2)(x+3)(x+1)(x+4) = 0$$

$x = 0$	$x - 2 = 0$	$x + 3 = 0$	$x + 1 = 0$	$x + 4 = 0$
	$x = 2$	$x = -3$	$x = -1$	$x = -4$

Solucions: 0, 2, -3, -1 i -4

Equacions irracionals
Són equacions on la variable o incògnita es troba dins d'arrel
Ex:

$$\sqrt{x+1} = 3x$$

Hem de diferenciar dos casos:

a) equacions amb una sola arrel
- separem l'arrel de la resta a costats diferents de la igualtat
- agrupem termes
- elevem al quadrat tots dos costats de la igualtat
- resolem l'equació

Ex:

$\sqrt{2x-1}$ - $2x = 1$

$\sqrt{2x-1} = 1 + 2x$
$(\sqrt{2x-1})^2 = (1 + 2x)^2$

$$\Big\downarrow\ (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

$2x - 1 = 1 + 4x^2 + 4x$
$0 = 4x^2 + 2x + 2$
$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 4}$ *No té solució*

b) equacions amb dues o més arrels
- separem les arrels a costats diferents de la igualtat
- elevem al quadrat tots dos costats de la igualtat
- si queden encara arrels repetim el procediment fins aplicar l'apartat anterior
- solucionem l'equació

Ex:

$3 - \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = 0$
$3 - \sqrt{x} = \sqrt{x-1}$
$(3 - \sqrt{x})^2 = (\sqrt{x-1})^2$

$$\Big\downarrow\ (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$9 + x - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x} = x - 1$
$10 = 6\sqrt{x}$
$10^2 = (6\sqrt{x})^2$
$100 = 36x$
$x = \dfrac{25}{9}$

Sistemes d'equacions lineals
Presenten dues o més equacions amb dues o més incògnites

Es classifiquen segons la solució

Sistemes
- compatibles
  - determinats → una única solució
  - indeterminats → moltes solucions
- incompatibles → no tenen solució

• Resolució:

Consisteix en trobar el valor numèric de les variables que compleixen totes les equacions.

Ex: x = - 2 i y = 1 són solucions del sistema $\left.\begin{array}{r} 2x - y = -5 \\ 3x = 1 - y \end{array}\right\}$?

2 · (-2) – 1 = 5	*Si*
3 · (-2) = 1 – 1	*No*

No, ja que si be compleixen la primera equació no la segona

Per tal de resoldre un sistema podem diferenciar,

I. mètodes numèrics
II. mètode gràfic

I. Mètodes numèrics

a) Substitució. Consisteix en deixar sola una de les variables d'una de les equacions i substituir el resultat obtingut a l'altre equació

Ex:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 2 \\ -x + 4y = -1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 2 \\ 4y + 1 = x \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} 2(4y+1) - 3y = 2 \\ 8y + 2 - 3y = 2 \\ 5y = 0 \\ y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4y + 1 = x \\ 4 \cdot 0 + 1 = x \\ 1 = x \end{array}$$

Sistema compatible determinat

b) Igualació. Consisteix en deixar sola la mateixa variable de totes dues equacions i igualar els resultats obtinguts.

Ex:

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ 6y = 10 - 2x \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = 5 - 3y \\ x = \dfrac{10-6y}{2} = 5 - 3y \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{r} 5 - 3y = 5 - 3y \\ 3y - 3y = 5 - 5 \\ 0y = 0 \end{array}$$

y = qualsevol nombre
x = un nombre igual a 5-3y

Sistema compatible indeterminat

c) Reducció. Consisteix en multiplicar una o les dues equacions pel (s) nombre (s) convenients, de manera que en sumar totes dues equacions una de les variables quedi anul·lada.

Ex:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 4 \\ -x + y = -1 \end{array}\right\} \qquad \cdot 2 \qquad \left.\begin{array}{r} 2x - y = 4 \\ -2x + 2y = -2 \end{array}\right\}$$

$$\overline{\;/ \qquad y = 2\;}$$

$$2x - y = 4$$
$$x = 3$$

Sistema compatible determinat

Ex :

$$\begin{array}{r} -3e + t = 2 \\ -6e + 2t = 1 \end{array} \qquad \cdot (-2) \qquad \left.\begin{array}{r} 6e - 2t = -4 \\ -6e + 2t = 1 \end{array}\right\}$$

$$\overline{\;/ \qquad / \quad = -3\;}$$

$$0 = -3$$

Sistema incompatible

• Observacions:

- Cal expressar les equacions en la forma general: ax + by = c
- El mètode de substitució és útil quan alguna de les incògnites té com a coeficient 1 ó -1.
- El mètode de reducció és aconsellable quan els coeficients d'una de les incògnites són iguals o un és múltiple de l'altre.
- Quan els coeficients de les incògnites són diferents de 1 ó -1, i no són múltiples ni iguals, podem fer servir el mètode d'igualació, i després eliminar els denominadors.
- En un sistema de tres equacions i tres incògnites podem aïllar una variable d'una de les equacions i substituir el resultat obtingut en les altres dues, d'aquesta manera obtindrem un sistema de dues equacions amb dues incògnites que podem resoldre per qualsevol dels mètodes anteriors.

Ex:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\} \quad x + y - 1 = z$$

$$\begin{array}{ll} 1a\ equació & 3x+2y+(x+y-1)=1 \\ 2ona\ equació & 5x+3y+4(x+y-1)=2 \end{array}\Bigg\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x+3y=2 \\ 9x+7y=6 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \cdot(-7) \\ \cdot 3 \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} -28x-21y=-14 \\ \underline{27x+21y=18} \end{array}\right\}$$

$$-x \quad / \quad = 4$$

$$4x+3y=2 \qquad 4\cdot(-4)+3y=2$$

$$-16+3y=2 \qquad y=6$$

$$x+y-1=z \qquad 4+6-1=z \qquad z=9$$

II. Resolució gràfica d'un sistema d'equacions

Un sistema d'equacions amb dos incògnites es pot resoldre gràficament. Per això cal deixar sola la *y* de totes dues equacions i representar les rectes obtingudes.

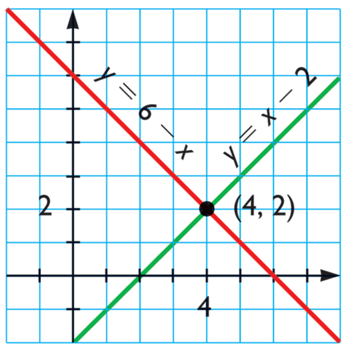
Ens podem trobar amb tres casos:

- les rectes coincideixen → sistema compatible indeterminat amb infinites solucions;
- les rectes són secants i coincideixen en un únic punt → sistema compatible determinat amb una única solució donada pels valors x i y del punt;
- les rectes són paral·leles → sistema incompatible sense solució ja que no tenen cap punt comú.

Ex: Resoldre gràficament el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \rightarrow r_1: y = 6 - x \\ \rightarrow r_2: y = x - 2 \end{array}$$

x	$y_1 = 6 - x$	$y_2 = x - 2$
0	***6***	***-2***
1	***5***	***-1***
2	***4***	***0***
3	***3***	***1***
4	***2***	***2***
5	***1***	***3***



Sistema compatible determinat

Solució: x = 4 i y = 2

Sistemes d’equacions no lineals

Són aquells que inclouen alguna equació no lineal, es a dir, de grau major a 1, amb fraccions algebraiques, irracionals, ...

Ex:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=3 \\ x^2+3y=2 \end{array}\right\}$$

Per resoldre-les normalment farem substitució però hem de fixar-nos si hi ha altres possibilitats

Ex:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=-3 \\ x^2-y^2=5 \end{array}\right\} \qquad x=y-3$$

$$(y-3)^2-y^2=5$$
$$y^2-6y+9-y^2=5$$
$$-6y+4=0$$
$$y=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$x=y-3$$
$$x=\frac{2}{3}-3=-\frac{7}{3}$$

Aplicació d’equacions: resolució de problemes.

Cal recordar que:

- hem d’assignar la incògnita o incògnites a la dada o dades que ens demana el problema.
- l’enunciat ens dona la relació entre les dades per poder escriure-la o les equacions. Si ens demanen més d’una cosa podem relacionar-les entre si

Ex: En una reunió hi ha 156 persones entre homes, dones i nens. El nombre de dones és el doble que el d’homes, i el de nens el triple de la suma del nombre de dones i d’ homes. Calculeu quantes persones hi ha de cada grup.

Nº d’homes: x

Nº de dones: doble de dones → 2 · x = 2x

Nº de nens: triple de la suma de dones i homes → triple de x + 2x → triple de 3x → 3 · 3x → 9x

Nº homes + nº dones + nº nens = 156
x + 2x + 9x = 156
12x = 156
x = 13

R: El nombre d’homes és 13, el de dones és de 26, i el de nens 117.

Ex: En una granja tenim 25 animals entre gallines i conills. Si tenim 80 potes, quants animals tenim de cada tipus?

x = nº de gallines
y = nº de conills

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 25 \\ 2x + 4y &= 80 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} x(-2) \quad -2x - 2y &= -50 \\ 2x + 4y &= 80 \\ \hline / \quad 2y &= 30 \end{aligned}$$

$$y = 15$$
$$x = 10$$

R: Tenim 15 conills i 10 gallines

Ex: Un mòbil des del repòs, i amb una acceleració de 0,12 m/s^2 recorre 294m en moviment rectilini. Quant temps necessita per fer aquest recorregut si la fórmula corresponent és $e = v_0 \cdot t + 1/2 \cdot a \cdot t^2$?

Hem d'identificar les dades i substituir a la fórmula, després de comprovar que tot està en les mateixes unitats

e = espai	$e = 294\ m$
v_0 = velocitat inicial	$v_0 = 0$ (ja que surt del repòs)
t = temps	$t = ?$
a = acceleració	$a = 0{,}12\ m/s^2$

$$e = v_0 \cdot t + 1/2 \cdot a \cdot t^2$$
$$294 = 0 \cdot t + 1/2 \cdot 0{,}12 \cdot t^2$$
$$294 = 0 + 0{,}06 \cdot t^2$$
$$294 = 0{,}06\, t^2$$
$$\frac{294}{0{,}06} = t^2$$
$$t = \sqrt{4900} = 70s$$

Inequacions

Una inequació és una desigualtat algebraica. Està formada per dos membres separats pels signes $\leq, <, \geq,$ o $>$.

Ex:

$$2x + 3 (x - 1) > 0$$

S'anomena solució d'una inequació qualsevol valor de la incògnita que faci certa la desigualtat. La solució és un conjunt de nombres que s'expressarà com un interval.

Inequacions de primer grau amb una incògnita
Per resoldre les inequacions de primer grau treballem com si fos una equació de primer grau, separant els termes que acompanyen la variable dels termes independents. La única variació és que, quan un terme **negatiu** passa a l'altre banda a multiplicar o dividir, la desigualtat canvia.

Ex: Resoleu $2x+7 \geq \frac{x}{2}-3$

$$2x+7 \geq \frac{x}{2}-3$$
$$7+3 \geq \frac{x}{2}-2x$$
$$10 \geq -\frac{3x}{2}$$
$$20 \geq -3x$$
$$-\frac{20}{3} \leq x$$
$$x \in [-\frac{20}{3},+\infty)$$

Inequacions de segon grau amb una incògnita
Es una desigualtat on la variable està elevada al quadrat
Ex:

$(x-1)^2 -5 > 2x$

Per resoldre-les:

- Passem tot a un costat de la desigualtat;
- Resolem l'equació corresponent canviant el signe de desigualtat per igualtat;
- Situem les solucions obtingudes en la recta real, dividint aquesta en intervals;
- Agafem un nombre qualsevol de cada interval i comprovem si compleix o no la desigualtat;
- Estudiem si la compleixen les solucions obtingudes inicialment en la resolució de l'equació;
- Expressem la solució en forma de interval

Ex: Resoleu $-x^2 + 4x > 2x -3$

$$-x^2+4x > 2x-3$$
$$-x^2+4x-2x+3 > 0$$
$$-x^2+2x+3 > 0$$

$$-x^2+2x+3=0$$
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot 3}}{2\cdot(-1)}=\frac{-2\pm 4}{-2}=\langle\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}$$

$-\infty$		-1		3		$+\infty$
	-2		0		4	
	$-(-2)^2 + 2\cdot(-2)+3 > 0?$		$-0^2 + 2 \cdot 0 + 3 > 0\ ?$		$-4^2 + 2 \cdot 4 + 3 > 0\ ?$	
	No		Si		No	
		No		No		

Solució: $(-1 , 3)$