Tema 4: EQUACIONS EXPONENCIAL I LOGARÍTMICA

Equació exponencial
Es tracta d'una equació on la incògnita es troba a l'exponent d'una potència.

$$a^{f(x)} = b$$

No hi ha una única manera de solucionar aquestes equacions, però en general, podem diferenciar:

a) "immediates"
b) les potències tenen la mateixa base
c) les potències tenen com a base dos nombres diferents on un d'ells és el quadrat de l'altre

a) "immediates". Posem tot en forma d'una única potència, amb la mateixa base, a tots dos costats de la igualtat, i igualem els exponents.
Ex:

$$5^{2x+1} = 625$$
$$5^{2x+1} = 5^4$$
$$2x+1 = 4$$
$$x = \frac{5}{2}$$

b) potències amb la mateixa base,
- utilitzem les propietats de les potències fins tenir tot en funció de a^x;
- traiem factor comú a^x;
- es modifiquen els termes per obtenir una de "immediata"

Ex:

$$2^x + 3 \cdot 2^{x-1} = 80$$
$$2^x + 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-1} = 80$$
$$2^x + 3 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2} = 80$$
$$2^x \left(1 + \frac{3}{2} \right) = 80$$
$$2^x \cdot \frac{5}{2} = 80$$
$$2^x = \frac{80 \cdot 2}{5}$$
$$2^x = 32$$
$$x = 5$$

Ex:

$$5^{x+1}+5^{x-2}+5^{x}=\frac{151}{25}$$

$$5^x \cdot 5^1 + 5^x \cdot 5^{-2} + 5^x = \frac{151}{25}$$

$$5^x\ (\ 5+\frac{1}{25}+1\ ) = \frac{151}{25}$$

$$5^x \cdot \frac{151}{25} = \frac{151}{25}$$

$5^x = 1$

$x = 0$

c) potències amb bases on una és el quadrat de l'altre. En aquest cas substituïm a^x per *t* i treballem com en una equació de segon grau; posteriorment calculem x

Ex:

$4^x + 3 \cdot 2^x = 88$

$(2^2)^x + 3 \cdot 2^x = 88$

$(2^x)^2 + 3 \cdot 2^x = 88$

Observeu que $(2^2)^x = (2^x)^2$ ja que es tracta de la potència d'una potència i es multipliquen els exponents

$$\Big\downarrow\ t = 2^x$$

$t^2 + 3t = 88$

$t^2 + 3t - 88 = 0$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-88)}}{2 \cdot 1} = \begin{matrix} 8 \\ -11 \end{matrix}$$

$2^x = 8$	$\rightarrow$	$x = 3$
$2^x = -11$	$\rightarrow$	No té solució

Ex:

$9^x - 6 \cdot 3^{x+1} + 81 = 0$

$(3^2)^x - 6 \cdot 3^x \cdot 3 + 81 = 0$

$(3^x)^2 - 18 \cdot 3^x + 81 = 0$

$$\Big\downarrow\ t = 3^x$$

$t^2 - 18\ t + 81 = 0$

$t = 9$

$3^x = 9$

$x = 2$

Logaritmes

S'anomena logaritme amb base *a* (a>0) de *b*

$$\lg_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b$$

Ex:

$\lg_2 8 = 3$ ja que $2^3 = 8$

$\lg_4 1 = 0$ ja que $4^0 = 1$

$\lg_3 \frac{1}{9} = -2$ ja que $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Observem que **el logaritme d'un nombre negatiu no existeix** ja que, com la base *a* és positiva, és impossible que un nombre major que 0 elevat a qualsevol nombre doni resultat negatiu.

$$\lg_{\text{nombre positiu}} b = x \quad \Leftrightarrow \quad \text{nombre positiu}^{\,x} = \text{nombre positiu b}$$

• Alguns logaritmes reben nom i simbologia especial:

- logaritme de base 10 o decimal: $\lg_a b = \log b$. Així,

$\log 10 = \lg_{10} 10 = 1$

$\log 100 = \lg_{10} 100 = 2$

$\log 1000 = 3$

...

$\log 0{,}1 = \lg_{10} \frac{1}{10} = \lg_{10} 10^{-1} = -1$

$\log 0{,}01 = \lg_{10} \frac{1}{100} = \lg_{10} 10^{-2} = -2$

$\log 0{,}001 = \lg_{10} \frac{1}{1000} = \lg_{10} 10^{-3} = -3$

...

$\log 10^n = n$

- logaritme de base *e* o neperià: $\lg_e b = \ln b$. Així,

$\ln e = \lg_e e = 1$

$\ln e^2 = \lg_e e^2 = 2$

...

$\ln \frac{1}{e} = \lg_e \frac{1}{e} = \lg_e e^{-1} = -1$

...

(Recordem que *e* és un nombre irracional de valor aproximat 2,71828182845 ...)

• Propietats:

b) $\lg_a a = 1$

c) $\lg_a 1 = 0$

d) $\lg_a (x \cdot y) = \lg_a x + \lg_a y$

e) $\lg_a \left(\frac{x}{y} \right) = \lg_a x - \lg_a y$

f) $\lg_a (x^n) = n \cdot \lg_a x$

Cal saber utilitzar aquestes propietats en tots dos sentits.

Ex: Expresseu log 320 en funció de log 2

$$log\ 320 = log\ (2^6 . 10) = log\ 2^6 + log\ 10 = 6 \cdot log\ 2 + log\ 10 = 6 \cdot log\ 2 + 1$$

Ex: Expresseu com un únic logaritme 2 ln x + ln 5 + 1

$$2\ ln\ x + ln\ 5 - 1 = ln\ x^2 + ln\ 5 - ln\ 10 = ln\ (x^2 \cdot 5) - ln\ 10 = ln\ \frac{5x^2}{10}$$

(Observem que hem de diferenciar entre ln 5+1 i ln (5+1), en el primer cas calculem primer el logaritme neperià de 5 i després sumem 1, en el segon cas primer sumem 5 i 1, i després calculem ln 6)

• La calculadora només treballa amb logaritmes decimals i neperians, per això es fa necessari un canvi de base,

de base *b* a base *a*, $\lg_b x = \frac{\lg_a x}{\lg_a b}$

Ex: Calculeu $\lg_2 8$ amb ajut de la calculadora

Sabem que $lg_2\ 8 = 3$ ja que $2^3 = 8$, però si passem de base 2 a base 10 (o a base e) podem fer el càlcul amb la calculadora

$$\lg_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2}$$

i comprovar que també dona 3.

Ex: Resoleu $2^x = 5$

Observem que 5 no és potència de 2 i que no podem resoldre l'equació com en el cas d'una exponencial immediata. Però podem agafar logaritmes a tots dos costats de la igualtat

$$2^x = 5$$
$$ln\ 2^x = ln\ 5$$
$$x \cdot ln\ 2 = ln\ 5$$
$$x = \frac{\ln 5}{\ln 2} =$$

Equacions logarítmiques
Són aquelles en què la incògnita està afectada per un logaritme.

Per resoldre aquestes equacions s'han d'aplicar les propietats dels logaritmes fins obtenir a tots dos costats de la igualtat un únic logaritme amb la mateixa base

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

per després igualar $f(x) = g(x)$

ΦJΦ: Cal comprovar els resultats

Ex:

$$\log(116 - x^2) - 2\log(x - 1) = 1$$

$$\log(116 - x^2) - \log(x - 1)^2 = 1$$
$$\log(116 - x^2) : (x - 1)^2 = \log 10$$
$$(116 - x^2) : (x - 1)^2 = 10$$
$$116 - x^2 = 10(x - 1)^2$$
$$116 - x^2 = 10(x^2 - 2x + 1)$$
$$116 - x^2 = 10x^2 - 20x + 10$$
$$0 = 11x^2 - 20x - 106$$

Solucions:

$x = 4$
$x = -24/11$ *solució no vàlida ja que* $\log(-24/11 - 1)$ *no existeix*