

Tema 4: FUNCIONS

Funció.

S'anomena funció real de variable real a tota aplicació que fa correspondre a cada element d'un conjunt inicial o domini un i només un element d'un conjunt final o recorregut.

Una funció indica una relació de dependència entre dos magnituds numèriques anomenades variables. A cada valor individual de la primera magnitud, x o variable independent, s'anomena anti-imatge i a cada valor corresponent de la segona magnitud, y o variable dependent, imatge.

$$y = f(x)$$

Ex:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \\ y &= 2x \end{aligned}$$

l'imatge de 2 és 4

$$f(2) = 4$$

l'anti-imatge de -6 és -3

$$f^{-1}(-6) = -3$$

• Una funció pot venir definida per:

- un enunciat
- una taula de valors
- un gràfic
- una fórmula

Característiques:

- a) Domini
- b) Recorregut
- c) Punts de tall amb els eixos
- d) Simetria
- e) Continuitat
- f) Creixement / decreixement
- g) Concavitat / convexitat

a) Domini:

- conjunt inicial
- conjunt de valors que pot prendre la x (el càlcul de la fórmula és possible o és coherent amb les condicions)

Ex: “ Lloguem un apartament per 500€ mensuals “ , el domini serà tots els nombres enters positius

Ex : $f(x) = 2/x$, el domini seran tots els nombres reals menys el 0 ja que $2/0$ no existeix

Funció	Domini	Hem de	Dom f
Polinòmica	\mathbb{R}	-	\mathbb{R}
Fracció algebràica	Tots els nombres menys els que facin 0 el denominador ja que $\mathbb{R}/0$ no existeix	Solucionar l'equació denominador = 0	$\mathbb{R} - \{ \text{solucions de l'equació} \}$
Arrel d'índex parell	Tots els nombres menys els que facin que el radicand sigui negatiu	Solucionar l'inequació radicand ≥ 0	Solucions de l'inequació
Arrel d'índex senar	\mathbb{R}	-	\mathbb{R}

Ex:

$$f(x) = x - 1 \quad \text{funció polinòmica}$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R}$$

Ex:

$$g(x) = \frac{2}{x + 3} \quad \text{fracció algebràica}$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

$$\text{dom } g = \mathbb{R} - \{ -3 \}$$

Ex:

$$y = x - 1 \quad \text{arrel quadrada}$$

$$x - 1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$\text{dom} = [1 , + \infty)$$

Ex:

$$f(x) = \quad \text{arrel cúbica}$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R}$$

- A nivell gràfic el domini és la projecció de tots els punts del gràfic sobre l'eix x

b) Recorregut

- Conjunt final
- Conjunt de valors que pren la y (resultats obtinguts en aplicar la fórmula)

Ex:

$$f(x) = x^2 - 2 \quad \text{Im} = [- 2 , + \infty)$$

- A nivell gràfic el recorregut és la projecció de tots els punts del gràfic sobre l'eix y

c) Simetria

Algunes funcions presenten simetria

- parella $f(x) = f(-x)$ (respecte l'eix y)
- senar $f(-x) = -f(x)$ (respecte les bisectrius o els eixos)

Ex :

$$y = x^4 + 2$$

$$f(x) = x^4 + 2$$

$$f(-x) = (-x)^4 + 2 = x^4 + 2$$

$$-f(x) = -x^4 - 2$$

simetria parella

d) Punts de tall amb els eixos

- eix x: $y = 0$
- eix y: $x = 0$

Ex:

$$f(x) = \frac{2x + 5}{x^2}$$

punts de tall amb l'eix x: $y = 0$

$$\frac{2x + 5}{x^2} = 0$$

$$2x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-5}{2}$$

$$\left(\frac{-5}{2}, 0 \right)$$

punts de tall amb l'eix y: $x = 0$

$$y = 2 \cdot 0 + \frac{5}{0^2}$$

$$y = \frac{5}{0}$$

no hi ha

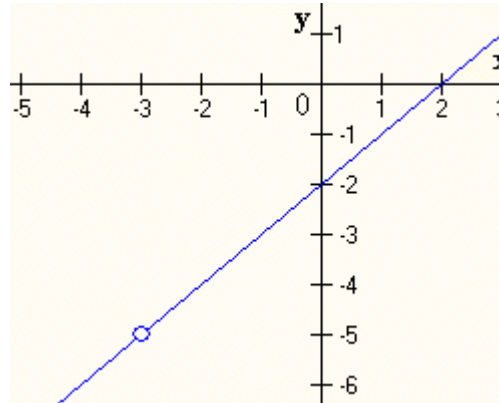
- Com a màxim hi ha un punt de tall amb l'eix y

e) Continuïtat

Es defineix respecte a les x

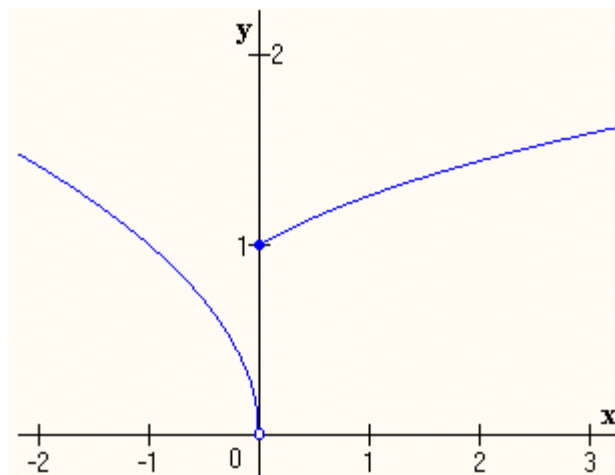
Hi ha diferents tipus de discontinuïtat: evitable, de salt i asimptòtica

Ex:



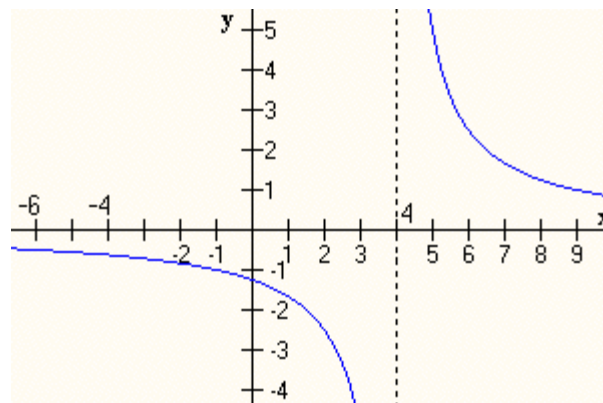
Discontinuitat evitable ("forat") en $(-3 , 5)$

Ex:



Discontinuitat de salt en $x = 0$

Ex:

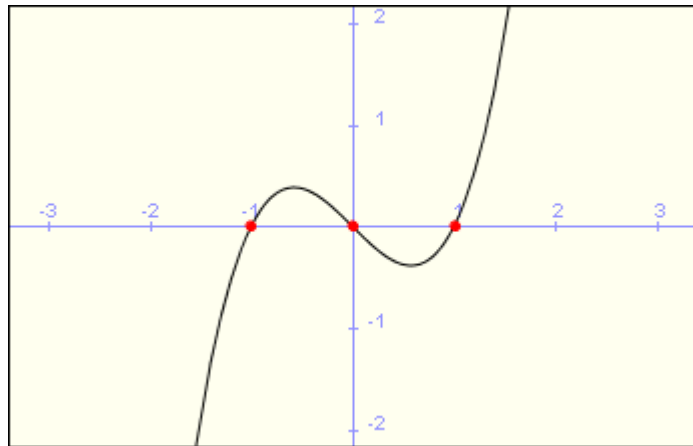


Discontinuitat asimptòtica en $x = 4$ (assímptota vertical)

f) Creixement / decreixement. Màxim i mínim relatiu

Es defineix respecte a les x

Ex:



Creixent: $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

Decreixent: $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

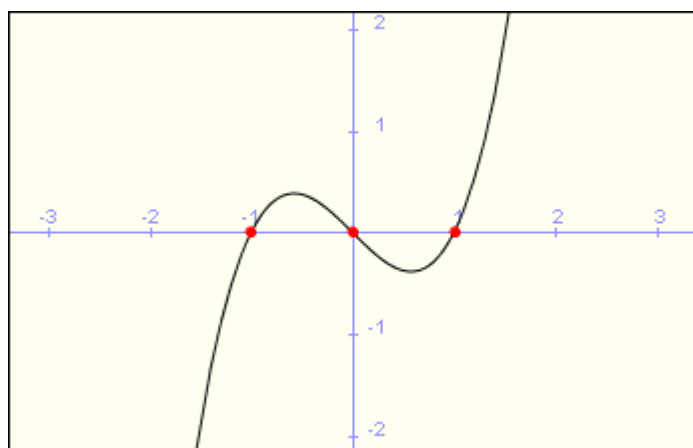
Màxim relatiu: $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

Mínim relatiu: $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$

g) Concavitat / convexitat. Punts d'inflexió

Es defineix respecte les x

Ex:



f(x) és convexa: $(-\infty, 0)$

còncava: $(0, +\infty)$

punt d'inflexió: $(0, 0)$

Funcions polinòmiques

Funcions polinòmiques de grau 0

Tipus	Fórmula	Gràfic	Pendent	Punts de tall	Exemple
Constant	$y = b$	Recta horitzontal	0	(n°, b)	$y = 2$ recta horitzontal que passa per (0,2) i (1,2)

Funcions polinòmiques de 1r grau

Tipus	Fórmula	Gràfic	Pendent	Punts de tall	Exemple
Afí	$y = ax + b$	Recta obliqua creixent si $a > 0$ decreixent si $a < 0$	a	$(0, b)$ $(\frac{-b}{a}, 0)$	$y = 3x + 2$ recta creixent que passa per (0,2) i $(\frac{-2}{3}, 0)$
Lineal	$y = ax$			$(0, 0)$ $(1, a)$	$y = -x$ recta decreixent que passa per (0,0) i (1,-1)

- El pendent indica el grau d'inclinació de la recta, quant més gran és el seu valor absolut més vertical és.

Funció polinòmica de 2n grau

Tipus	Fórmula	Gràfic	Vèrtex	Exemple
Completa	$y = ax^2 + bx + c$	Paràbola còncava si $a > 0$ convexa si $a < 0$	$(\frac{-b}{2a}, \dots)$	$f(x) = x^2 - 2x + 1$ paràbola còncava ($a = 1$) amb vèrtex a (1, 0)
Incompleta	$y = ax^2 + bx$ $y = ax^2 + c$			$y = -2x^2 + 5$ paràbola convexa ($a = -2$) amb vèrtex a (0, 5)

Funció de proporcionalitat inversa

Fórmula	Gràfic	Exemple
$y = \frac{k}{P(x)}$ amb $k \in \mathbb{R}$	Hipèrbole a 1r i 3r quadrant si $k > 0$ Decreixent a 2n i 4t quadrant si $k < 0$ Creixent	$y = \frac{2}{x}$ hipèrbole decreixent

Funcions definides a trossos

Són funcions on la fórmula varia segons els intervals del domini.

Ex:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 8 & \text{si } x < -3 \\ x^2 - 7 & \text{si } -3 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Es tracta de dibuixar cada funció i després mantenir el gràfic en l'interval corresponent

