Tema 4: SUCCESSIONS. PROGRESSIONS. ARITMÈTICA MERCANTIL

Successions

Conjunt de nombres ordenats, es a dir, on és important la posició que ocupen

$$a = \{ a_1, a_2, ..., a_{n}, ... \}$$

Ex:

Successió a: $a = \{ 2, 4, 6, 8, ... \}$ on el primer terme o $a_1 = 2$
$a_2 = 4$ ...

Successió b: $b = \{ 8, 4, 6, 2, ... \}$ on el primer terme o $b_1 = 8$
$b_2 = 4$ ...

● El terme general d'una successió és una expressió algebraica que ens permet calcular un terme a partir de:

- el terme o termes anteriors (recurrència) o
- a partir del lloc que ocupa (llei general)

Ex$_1$: Escriu els primers termes de la successió *a* amb terme general $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 4$ i $a_1 = 3$

$a_1 = 3$
$a_2 = 3 \cdot a_1 + 4 = 3 \cdot 3 + 4 = 13$
$a_3 = 3 \cdot a_2 + 4 = 3 \cdot 13 + 4 = 43$
$a_4 = 3 \cdot a_3 + 4 = 3 \cdot 43 + 4 = 133$

$a_n = \{ 3, 13, 43, 133, ... \}$

Ex$_2$: Escriu els primers termes de la successió *a* amb terme general $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$

$$a_1 = \frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$$
$$a_2 = \frac{2}{2\cdot 2+1} = \frac{2}{5}$$
$$a_3 = \frac{3}{2\cdot 3+1} = \frac{3}{7}$$
$$a_4 = \frac{4}{2\cdot 4+1} = \frac{4}{9}$$

$$a_n = \{ \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, ... \}$$

Progressions

Són un tipus de successions on cada terme és igual a l'anterior sumant o multiplicant per un determinat valor numèric.

Hi ha dos tipus:

a) progressions aritmètiques
b) progressions geomètriques

a) **Progressions aritmètiques**. És una successió on cada terme, excepte el primer, s'obté sumant a l'anterior un nombre constant anomenat diferència (d)

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Ex: a = { 2, 4, 6, 8, ... } és una progressió aritmètica?

$a_1 = 2$
$a_2 = 4 = 2 + 2 = a_1 + 2$
$a_3 = 6 = 4 + 2 = a_2 + 2$
$a_4 = 8 = 6 + 2 = a_3 + 2$

Si, amb d = 2

• El terme general és

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Ex: Calculeu el terme general d'una progressió aritmètica amb $a_8 = 2$ i $d = - ½$

$a_8 = a_7 + d$
$a_8 = (a_6 + d) + d = a_6 + 2d$
$a_8 = (a_5 + d) + 2d = a_5 + 3d$
...
$a_8 = a_1 + 7d$
$2 = a_1 + 7 \cdot (-\frac{1}{2})$
$2 + \frac{7}{2} = a_1$
$\frac{11}{2} = a_1$

$$a_n = \frac{11}{2} + (n - 1)(-\frac{1}{2}) = \frac{12-n}{2}$$

• La suma dels n primers termes d'una progressió aritmètica és

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Demostració:

En una progressió aritmètica de n termes, la suma dels termes equidistants dels extrems és igual a la suma d'aquests extrems, ja que

$$a_{n-1} + a_2 = a_n - d + a_1 + d = a_n + a_1$$
$$a_{n-2} + a_3 = a_n - 2d + a_1 + 2d = a_n + a_1$$

De manera que

	$S_n =$	a_1	$+$	a_2	$+ \dots +$	a_{n-1}	$+$	a_n
$+$	$S_n =$	a_n	$+$	a_{n-1}	$+ \dots +$	a_2	$+$	a_1

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$
$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Ex: La suma dels n primers múltiples de 3 és 108. Quants múltiples de 3 hem sumat?

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \qquad \text{amb } a_n = 3n$$
$$108 = \frac{(3 + 3n) \cdot n}{2}$$
$$108 \cdot 2 = 3n + 3n^2$$
$$0 = 3n^2 + 3n - 216 \quad \begin{array}{l} \rightarrow \quad n = -9 \quad \textit{impossible} \\ \rightarrow \quad n = 8 \end{array}$$

S'han sumat els 8 primers termes

● Interpolar medis aritmètics entre dos nombres consisteix en construir una progressió aritmètica que tingui per extrems dos nombres determinats.
Donats els extrems *a* i *b*, i el nombre de medis a interpolar sigui *m*, la diferència d és:

$$d = \frac{b - a}{m + 1}$$

Ex: Interpolar tres medis aritmètics entre 8 i -12.

$$d = \frac{-12 - 8}{3 + 1} = -5$$

La progressió serà 8, 3, -2, -7, -12.

b) **Progressions geomètriques**. És una successió on cada terme, excepte el primer, s'obté multiplicant a l'anterior un nombre constant anomenat raó (r)

$$a_n = a_{n-1} \cdot r$$

Ex: a = { $\sqrt{5}$, 5, $5\sqrt{5}$, 25 ,... } és una progressió geomètrica?

$a_1 = \sqrt{5}$
$a_2 = 5 = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = a_1 \cdot \sqrt{5}$
$a_3 = 5\cdot\sqrt{5} = 5 \cdot \sqrt{5} = a_2 \cdot \sqrt{5}$
$a_4 = 25 = 5\cdot\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = a_3 \cdot \sqrt{5}$

Si, amb $r = \sqrt{5}$

• El terme general és

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Ex: Calculeu el terme general de la progressió geomètrica a = { 3, - 6, 12, -24, ... }

$a_2 = a_1 \cdot r \quad \rightarrow \quad r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{-6}{3} = -2$
$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
$a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

• La suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica és

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Demostració:

En una progressió geomètrica de n termes observem que

$a_2 = a_1 \cdot r$
$a_3 = a_2 \cdot r$
$a_4 = a_3 \cdot r$

De manera que

$$\begin{array}{rrcccccccc} & r \cdot S_n = & & + & a_1 \cdot r & + & a_2 \cdot r & + \dots + & a_{n-1} \cdot r & + \; a_n \cdot r \\ - & S_n = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + \dots + & a_n & \\ \hline & S_n (r-1) = & -a_1 & + & 0 & + & 0 & + \dots + & 0 & + \; a_n \cdot r \end{array}$$

$S_n (r-1) = -a_1 + a_n \cdot r$

$S_n\,(r-1) = -\ a_1 + (\ a_1 \cdot r^{\,n-1}) \cdot r$

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Ex: En una progressió geomètrica en què $r = \frac{1}{2}$ i $a_n = \frac{1}{3}$, calculeu S_{20}.

$$S_{20} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{20} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 0{,}667$$

• El producte dels n primers termes d'una progressió geomètrica és

$$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Ex: Calculeu el producte dels cinc primers termes de la progressió geomètrica 3, 6, 12, ...

$$P_5 = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5}$$
$a_5 = a_1 \cdot 2^{\,5-1} = 3 \cdot 2^4 = 48$

$$P_5 = \pm\sqrt{(3 \cdot 48)^5} = 248.832$$

• Interpolar medis geomètrics o proporcionals entre dos nombres consisteix en construir una progressió geomètrica que tingui per extrems dos nombres determinats.
Donats els extrems *a* i *b*, i el nombre de medis a interpolar *m,* la raó *r* s'obté:

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Ex: Interpolar tres medis geomètrics entre 3 i 48.

La progressió geomètrica serà: 3, 6, 12, 24 i 48.

Percentatges

Per calcular el *n%* de *a* s'aplica

$$n\% \quad de \quad a \quad \rightarrow \quad \frac{n \cdot a}{100}$$

Ex: 3% de 15

$$\frac{3 \cdot 15}{100} = 0{,}45$$

• El **tant per u** s'obté en expressar un percentatge com un nombre decimal.

Ex:

$$12\% \rightarrow \frac{12}{100} = 0{,}12$$

Si multipliquem el tant per u per mil obtenim el **tant per mil** $^0/_{00}$.

Ex:

$$0{,}12 \cdot 1000 = 120\ ^0/_{00}$$

Percentatges encadenats

Un **augment percentual** consisteix en augmentar a una quantitat C un *a%*, de forma que si la quantitat és 100 pagarem 100 + a, es a dir, per una quantitat C una augment del *a%* serà

(100 + a)% de C

Això es dona en cas d'impostos, recàrrecs, etc.

Una **disminució percentual** consisteix en disminuir a una quantitat C un *a%*, de forma que si la quantitat és 100 pagarem 100 - a, es a dir, per una quantitat C una disminució del *a%* serà

(100 - a)% de C

Això es dona en rebaixes, bonificacions, etc.

Quan sobre una mateixa quantitat s'efectuen diversos augments i / o disminucions parlem de percentatges encadenats.

Ex: Comprem un ordinador que, sense IVA, costa 1.075 €, i un ratolí que costa 35 € sobre el que em fan un descompte del 25%. Si l'IVA és d'un 16%, quant pagarem a la botiga d'informàtica?

Preu de l'ordinador : 1075 € + 16% d'aquesta quantitat corresponent a l' IVA

$$116\% \quad de \quad 1075 \quad \rightarrow \quad \frac{116 \cdot 1075}{100} = 1247€$$

Preu del ratolí: 35 € - 25% d'aquesta quantitat en concepte de rebaixa

$$75\% \quad de \quad 35 \quad \rightarrow \quad \frac{75 \cdot 35}{100} = 26{,}25€$$

Interès simple

L'interès simple, I, és el benefici que origina una quantitat de diners C_0 (capital) en un temps t (en anys) a un rèdit anual del $r\%$

$$I = \frac{C_0 \cdot r \cdot t}{100}$$

En l' interès simple els beneficis es retiren després de cada període de temps i no es reinverteixen.

El rèdit és un percentatge, mentre que l'interès és un nombre, si be, en llenguatge col·loquial parlem del 3% d'interès. Es a dir,

$$i = \frac{r}{100}$$

Ex: Per invertir diners en un dipòsit, un banc ens ofereix abonar-nos els interessos anualment en un compte diferent al dels diners invertits. Si invertim 8500 € a un 5% anual, quants diners rebrem en concepte d'interessos en 3 anys?

$C_0 = 8500$ €
$r = 5\%$
$t = 3$

$$I = \frac{8500 \cdot 5 \cdot 3}{100} = 1275€$$

Ex: Quin rèdit ens ofereix el mateix banc si per una inversió de 15000 € durant 15 mesos rebem uns interessos de 630 €?

$C_0 = 15000$ €
$t = 15$ *mesos* $= 1{,}25$ *anys*
$I = 630$

$$630 = \frac{15000 \cdot r \cdot 1{,}25}{100}$$

$$\frac{630 \cdot 100}{15000 \cdot 1{,}25} = r$$

$$r = 3{,}36\%$$

Interès compost

Quan els interessos obtinguts al final de cada període s'afegeixen al capital inicial i es reinverteixen es parla d' interès compost.

Si invertim un capital C_0 a un rèdit de *r%* durant *t* anys, el capital final C_f obtingut a interès compost serà

$$C_f = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

Demostració:

$$C_{1r\ any} = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

$$C_{2n\ any} = C_{1r\ any} + \frac{r}{100}C_{1r\ any} = C_{1r\ any}\left(1+\frac{r}{100}\right) = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right) = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$C_{3r\ any} = C_{2n\ any} + \frac{r}{100}C_{2n\ any} = C_{2n\ any}\left(1+\frac{r}{100}\right) = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left(1+\frac{r}{100}\right) = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$$

en t anys

$$C_f = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

Ex: En una entitat financera els interessos anuals s'afegeixen al capital invertit. Si el dipòsit inicial és de 12000 € a un rèdit del 4,5% anual, quants diners rebrem després de 5 anys?

$C_0 = 12000$ €
$t = 5$ anys
$r = 4,5\%$

$$C_f = 12000\left(1+\frac{4,5}{100}\right)^5 = 14954,18€$$

Ex: Quin interès ens ofereix un dipòsit de 12000 € si, desprès de 6 anys, ens tornen 15000 €?

$C_0 = 12000$ €
$t = 6$ anys
$C_f = 15000$ €

$$15000 = 12000\cdot(1+i)^6$$

$$\frac{15000}{12000} = (1+i)^6$$

$$\sqrt[6]{\frac{15000}{12000}} = 1+i$$

$$i = \sqrt[6]{\frac{5}{4}} - 1$$

$$i = 0,0379$$

Ex: Quant de temps cal tenir dipositats 200 € al 6% per obtenir 267,65 € al final del període?

C_0 = 200 €
Cf = 267,65 €
r = 6%

$$267{,}65 = 200\left(1+\frac{6}{100}\right)^t$$
$$\frac{267{,}65}{200} = 1{,}06^t$$
$$1{,}33825 = 1{,}06^t$$
$$\ln 1{,}33825 = \ln(1{,}06^t)$$
$$\ln 1{,}33825 = t\cdot \ln 1{,}06$$
$$t = \frac{\ln 1{,}33825}{\ln 1{,}06}$$
$$t = 5{,}00031$$

El temps serà de 5 anys aproximadament

• Observem que el càlcul del capital final en l' interès compost és una progressió geomètrica amb primer terme $a_1=C_0$ i raó r

$$r = \left(1+\frac{r}{100}\right) = (1+i)$$

<u>Anualitats de capitalització</u>
Al principi de cada any s'inverteix un capital fixa C_0 durant t anys amb un rèdit r. Veiem quin serà el rendiment final després de t anys de la primera imposició per cada imposició anual

1a imposició anual: C_0 — Rendiment final $_1$: $C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$

2ona imposició anual: C_0 — Rendiment final $_2$: $C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^{t-1}$

3a imposició anual: C_0 — Rendiment final $_3$: $C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^{t-2}$

....

Penúltima imposició: C_0 — Rendiment final $_{t-1}$: $C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

Última imposició: C_0 — Rendiment final $_t$: $C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)$

Observem que el capital final C_f serà la suma de tots els rendiments finals anteriors. Aquests rendiments són els t primers termes d'una progressió geomètrica amb:

$$a_1 = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

$$r = \left(1+\frac{r}{100}\right)$$

Recordem que, en una progressió geomètrica, la suma dels n primers termes és:

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$C_f = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{100}\right)^t - 1}{\left(1+\frac{r}{100}\right) - 1}$$

Si treballem amb interessos:

$$C_f = C_0(1+i)\cdot\frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Ex: Quins seran els beneficis que s'obtindran si s'imposa un capital de 5000€ durant 3 anys al 5%?

$C_0 = 5000$ €
$t = 3$ anys
$$i = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

$$C_f = C_0(1+i)\cdot\frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

$$C_f = 5000(1+0{,}05)\cdot\frac{(1+0{,}05)^3 - 1}{0{,}05} =$$

$$= 5000(1{,}05)\cdot\frac{1{,}05^3 - 1}{0{,}05} = 16550{,}625€$$

Beneficis: 16550,625 – 3 · 5000 = 1550,625 €

Anualitats d'amortització

Les entitats financeres, per deixar-nos una quantitat de diners C en préstec, determinen unes imposicions anuals C_0 que s'han de pagar per tornar aquests diners. Aquestes imposicions tenen en compte el rendiment que aquests diners hauria donat al banc a un rèdit r durant t anys.

Si ens deixen un capital de C euros, el deute més els interessos acumulats es converteixen en

$$C\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

Les quantitats C que imposem periòdicament també produeixen uns interessos, totes excepte la última, ja que quan fem l'ingrès d'aquesta es dona per tancat el procés

1a quota anual: C_0 Rendiment final $_1$: $C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^{t-1}$

2ona quota anual: C_0 Rendiment final $_2$: $C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^{t-2}$

3a quota anual: C_0 Rendiment final $_3$: $C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^{t-3}$

....

Penúltima quota: C_0 Rendiment final $_{t-1}$: $C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)$

Última imposició: C_0 Rendiment final $_t$: C_0

La suma de totes aquestes quantitats que es troben en progressió geomètrica amb

$a_1 = C_0$

$r = \left(1+\frac{r}{100}\right)$

han de ser iguals al capital prestat més interessos, es a dir

$$C\left(1+\frac{r}{100}\right)^t = C_0 + C_0\left(1+\frac{r}{100}\right) + \ldots + C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^{t-2} + C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^{t-1}$$

$$C\left(1+\frac{r}{100}\right)^t = C_0\,\frac{\left(1+\frac{r}{100}\right)^t-1}{\frac{r}{100}\left(1+\frac{r}{100}\right)^t}$$

Si treballem amb interessos:

$$C = C_0 \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i \cdot (1+i)^t}$$

Ex: Demanem un préstec de 120.000 € a un interès anual del 4,5% i l'hem de tornar en 20 quotes anuals. De quant serà cada quota?

C = 120.000 €
i = 0,045
t= 20 anys

$$C = C_0 \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i \cdot (1+i)^t}$$

$$120.000 = C_0 \cdot \frac{(1+0,045)^{20} - 1}{0,045 \cdot (1+0,045)^{20}}$$

$$120.000 \cdot \frac{0,045 \cdot (1,045)^{20}}{1,045^{20} - 1} = C_0$$

$$C_0 = 9225,14 \text{ €} / \text{any}$$

Taules d'amortització

La taula d'amortització d'un préstec presenta les dades:

- dates de pagament de la quota
- quota anual
- interessos del període, es a dir, els interessos generats pel capital que encara ens queda per pagar
- capital amortitzat, és la part que sobra de la quota anual després de pagar els interessos corresponents i s'utilitza per reduir el capital prestat
- capital pendent de pagar

Ex: Taula d'amortització d'un préstec de10.000 € al 5,5% durant 12 anys.

C = 10.000 €
i = 0,055
t = 12 anys

$$10.000 = C_0 \cdot \frac{(1+0,055)^{12} - 1}{0,055 \cdot (1+0,055)^{12}}$$

$$10.000 \cdot \frac{0,055 \cdot (1,055)^{12}}{1,055^{12} - 1} = C_0$$

$$C_0 = 1160,29 \text{ €}$$

Temps (any)	Quota anual (€)	Interessos del període (€)	Capital amortitzat (€)	Capital pendent (€)
0	-	-	-	*10.000,00*
1	*1160,29*	*550 (1)*	*610,29 (2)*	*9.389,71 (3)*
2	*1160,29*	*516,43(4)*	*643,86*	*8.745,85*
3	*1160,29*	*481,02*	*679,27*	*8.066,58*
4	*1160,29*	*443,67*	*716,62*	*7.349,96*
5	*1160,29*	*404,25*	*756,04*	*6.593,92*
6	*1160,29*	*362,67*	*797,62*	*5.796,30*
7	*1160,29*	*318,80*	*841,49*	*4.954,81*
8	*1160,29*	*272,51*	*887,78*	*4.067,03*
9	*1160,29*	*223,69*	*936,60*	*3.130,43*
10	*1160,29*	*172,17*	*988,12*	*2.142,31*
11	*1160,29*	*117,83*	*1042,46*	*1.099,85*
12	*1160,29*	*60,49*	*1099,80*	*0,05*

(1) 10.000 · 0,055 = 550
(2) 1160,29 – 550 = 610,29
(3) 10.000 – 610,29 = 9.389,71
(4) 9,389,71 · 0,055 = 516,43

Nota: Quan al final ens queda un capital pendent com en aquest cas, s'ajusta l'última anualitat per tal que doni exacte.

Amortitzacions inverses

Mentre que el préstec que ens dona un banc per la compra d'un habitatge s'anomena hipoteca, la hipoteca inversa consisteix en què una persona, en un determinat moment, ingressa una quantitat de diners o un habitatge i, a canvi, el banc li dona una quantitat fixa anual per la resta de la seva vida.

Per calcular la quota que rebrà hem de consultar les taules d'esperança de vida donades per l'Institut Nacional d'Estadística (INE) que ens marca el termini d'amortització.

Ex: En fer 70 anys, un home diposita 50.000 € en una entitat financera per tal de rebre una quantitat anual de per vida. Si l'operació es fa a un rèdit del 3,5% anual, quina serà la renda anual que rebrà aquesta persona?

Segons l'INE (2005) l'esperança de vida d'un home de 70 anys és de 13,61 anys

C = 50.000 €
i = 0,035
t = 13,61 anys

$$50.000 = C_0 \cdot \frac{(1+0{,}035)^{13{,}61} - 1}{0{,}035 \cdot (1+0{,}035)^{13{,}61}}$$

$$50.000 \cdot \frac{0{,}035 \cdot (1{,}035)^{13{,}61}}{1{,}035^{13{,}61} - 1} = C_0$$

$$C_0 = 4.680{,}72€$$

<u>Terminis diferents als anuals</u>

En tots els apartats anteriors hem suposat que les imposicions o rendes es produïen anualment, però en la majoria de casos no és així.

Si la quota es fa p vegades a l'any considerem que l'interès és la p part de l'anual i que els períodes de temps són p vegades el nombre d'anys.

Per exemple, el capital que s'obté, C, amb una quota d'amortització C_0 que efectuem p vegades a l'any, a un interès i durant t anys

$$C = C_0 \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{p}\right)^{t \cdot p} - 1}{\frac{i}{p} \cdot \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{t \cdot p}}$$

En l'exemple anterior, si la renda és mensual:

$$50.000 = C_0 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0{,}035}{12}\right)^{13{,}61 \cdot 12} - 1}{\frac{0{,}035}{12} \cdot \left(1 + \frac{0{,}035}{12}\right)^{13{,}61 \cdot 12}}$$

$$C_0 = 385{,}27\ €$$

Nota: Un any comercial consta de 12 mesos de 30 dies, és a dir, de 360 dies.

<u>Taxa anual equivalent T.A.E.</u>

Quan dipositem una quantitat o demanem un préstec a una entitat financera, aquesta ens dona els interessos que s'aplicaran anualment. Però, normalment, la quota que rebem pel dipòsit, o la que paguem pel préstec, es fa en terminis inferiors a un any; normalment

- mensualment, si es tracta d'amortitzar un préstec
- trimestralment, si es tracta de cobrar els interessos d'un dipòsit
- ...

això fa que les quotes anuals d'interessos no siguin reals. Per aquest motiu les entitats estan obligades a facilitar la **Taxa Anual Equivalent** o **T.A.E.** que ens permet conèixer quin és redit real que ens genera un dipòsit o un préstec de 1 euro anual amb interès anual i que és liquida p vegades l'any

$$\text{T.A.E} = \left[\left(1 + \frac{i}{p}\right)^{p} - 1\right] \cdot 100$$

Ex: Volem contractar un préstec al 4,5% d'interès anual i ens ofereixen fer els pagaments mensuals, semestrals o anuals. Quina opció ens convé?

Mensuals: $\text{T.A.E} = \left[\left(1+\dfrac{0{,}045}{12}\right)^{12} - 1\right]\cdot 100 = 4{,}59\%$

Semestrals: $\text{T.A.E} = \left[\left(1+\dfrac{0{,}045}{2}\right)^{2} - 1\right]\cdot 100 = 4{,}55\%$

Anualment: 4,50%

Com és un préstec i ens interessa que l'interès sigui mínim escollirem el pagament anual. En canvi, si es tractés d'una imposició ens interessa que sigui màxim i demanarem un pagament mensual.