Tema 5: FUNCIONS

Funció.

S'anomena funció real de variable real a tota aplicació que fa correspondre a cada element d'un conjunt inicial o domini un i només un element d'un conjunt final o recorregut.

Una funció indica una relació de dependència entre dos magnituds numèriques anomenades variables. A cada valor individual de la primera magnitud, *x* o variable independent, s'anomena anti-imatge i a cada valor corresponent de la segona magnitud, *y* o variable dependent, imatge.

$$y = f(x)$$

Ex:

$f(x) = 2x$
$y = 2x$

l'imatge de 2 és 4 $f(2) = 4$
l'anti-imatge de -6 és -3 $f^{-1}(-6) = -3$

- Una funció pot venir definida per:
  - un enunciat
  - una taula de valors
  - un gràfic
  - una fórmula

Ex:

Passejant trobem un cartell al costat de la porta d'una botiga que anuncia:
" El preu del metre de qualsevol roba a 6 €!! " ENUNCIAT

Ens parla de la relació entre dues magnituds
la longitud de la roba x
el preu y

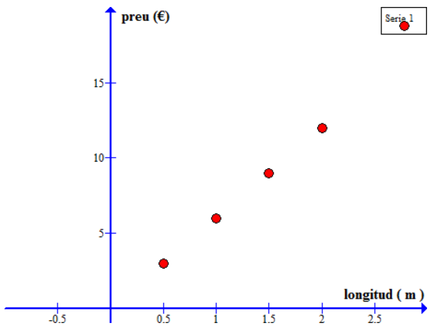
Podem fer una taula on es relaciona la longitud de la roba que comprem i el preu que paguem:

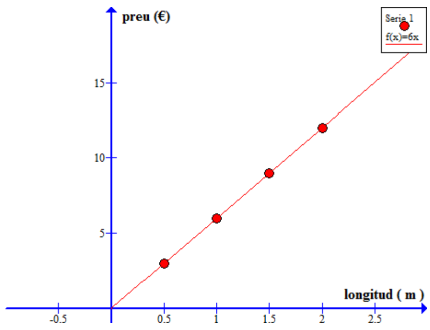
Longitud (m)	Preu (€)
0,5	3
1,0	6
1,5	9
2,0	12

TAULA

(Observem que la longitud mai pot ser un nombre negatiu)

Gràficament es pot representar





GRÀFIC

Però, hi ha alguna expressió o fórmula que em relacioni la longitud de la roba que comprem (x) i el preu que paguem (y)?. Pensem

Si comprem		1 metre paguem		6 € →	6 · 1 = 6	
"	"	2 metres	"	12 € →	6 · 2 = 12	
"	"	3 metres	"	18 € →	6 · 3 = 18	
"	"	12 metres	"	72 € →	6 · 12 = 72	
…						
"	"	x metres	"	y € →	6 · x = y	FÓRMULA

<u>Característiques</u>:

a) Domini
b) Recorregut
c) Punts de tall amb els eixos
d) Simetria
e) Continuïtat
f) Creixement / decreixement
g) Concavitat / convexitat

a) <u>Domini</u>:

- conjunt inicial
- conjunt de valors que pot prendre la *x* (el càlcul de la fórmula és possible o és coherent amb les condicions)

Ex: " Lloguem un apartament per 500€ mensuals " , el domini serà tots els nombres enters positius

Ex : f(x) = 2/x, el domini seran tots els nombres reals menys el 0 ja que 2/0 no existeix

Funció	Domini	Hem de ….	Dom f
Polinòmica	|R	-	|R
Fracció algebraica	Tots els nombres menys els que facin 0 el denominador ja que |R/0 no existeix	Solucionar l'equació denominador = 0	|R – { solucions de l'equació }
Arrel d'índex parell	Tots els nombres menys els que facin que el radicand sigui negatiu	Solucionar l'inequació radicand = 0	Solucions de l'inequació
Arrel d'índex senar	|R	-	|R
Exponencial	Segons quin dels casos anteriors es doni a l'exponent	Veure casos anteriors	Veure casos anteriors
Logarítmica	Tots els nombres menys els que facin tenir logaritme de 0 o d'un negatiu, i els casos anteriors	Expressió > 0 o veure casos anteriors	Solucions de la inequació o veure casos anteriors

Ex:

f(x) = x – 1 funció polinòmica
dom f = |R

Ex:

g(x) = $\frac{2}{x+3}$ fracció algebraica

x + 3 = 0

x = - 3

dom g = |R – { - 3 }

Ex:

y = $\sqrt{x-1}$ arrel quadrada

x – 1 = 0

x = 1

dom = [1 , + 8)

Ex:

f(x) = $\sqrt[3]{2x-4}$ arrel cúbica

dom f = |R

Ex:

f(x) = $\sqrt{\frac{2x}{x+3}}$

El domini ha de complir: $\frac{2x}{x+3} \geq 0$ *i* $x + 3 \neq 0$.

Per tal que es doni la primera condició

$2x \geq 0$ *i* $x + 3 > 0$

$x \geq 0$ $x > -3$ $\rightarrow$ $x \geq 0$

$2x \leq 0$ *i* $x + 3 < 0$

$x \leq 0$ $x < -3$ $\rightarrow$ $x < -3$

per la segona condició $x \neq -3$

Dom = $(-\infty , -3) \cup [0 , +\infty)$

Ex:

g(x) = log (x + 4)

$x + 4 > 0$

$x > -4$

Dom = $[-4 , +\infty)$

• A nivell gràfic el domini és la projecció de tots els punts del gràfic sobre l'eix x

b) <u>Recorregut</u>

- Conjunt final
- Conjunt de valors que pren la *y* (resultats obtinguts en aplicar la fórmula)

Ex:

$f(x) = x^2 - 2 \quad Im = [-2 , +\infty)$

• A nivell gràfic el recorregut és la projecció de tots els punts del gràfic sobre l'eix y

c) <u>Simetria</u>

Algunes funcions presenten simetria

- parella $f(x) = f(-x)$ (respecte l'eix y)
- senar $f(-x) = -f(x)$ (respecte les bisectrius o els eixos)

Ex :

$y = x^4 + 2$

$f(x) = x^4 + 2$
$f(-x) = (-x)^4 + 2 = x^4 + 2$
$-f(x) = -x^4 - 2$

simetria parella

d) <u>Punts de tall amb els eixos</u>

- eix x: y = 0
- eix y: x = 0

Ex: $f(x) = \frac{2x+5}{x^2}$

punts de tall amb l'eix x: y = 0

$$\frac{2x+5}{x^2} = 0$$
$$2x + 5 = 0$$
$$x = \frac{-5}{2} \qquad (\frac{-5}{2}, 0)$$

punts de tall amb l'eix y: x = 0

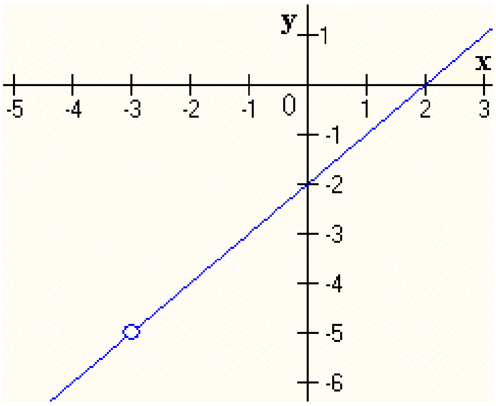
$$y = 2\cdot 0 + \frac{5}{0^2} \qquad y = \frac{5}{0}$$

no hi ha

• Com a màxim hi ha un punt de tall amb l'eix y

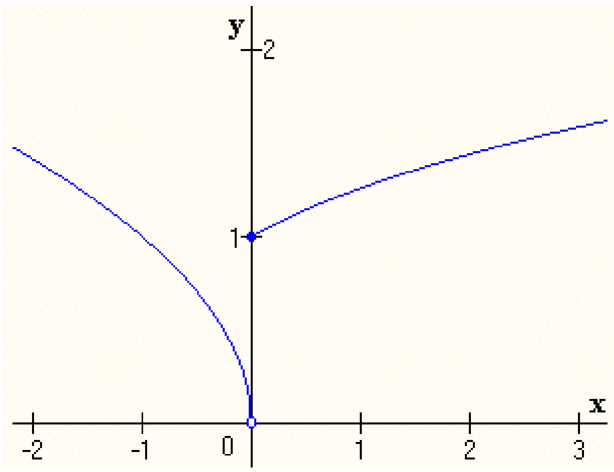
e) <u>Continuïtat</u>
Es defineix respecte a les x

Hi ha diferents tipus de discontinuïtat: evitable, de salt i asimptòtica
Ex:



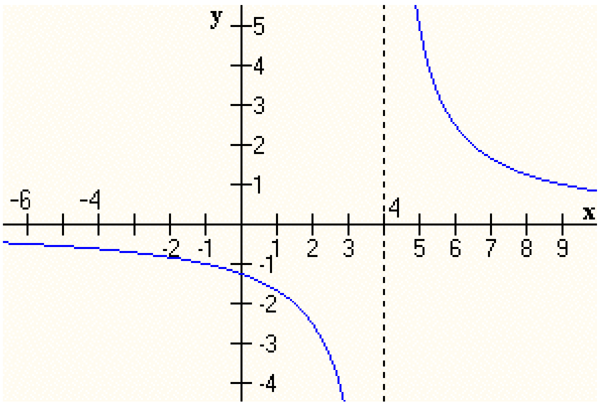
Discontinuïtat evitable (“forat”) en (-3 , 5)

Ex:



Discontinuïtat de salt en x = 0

Ex:

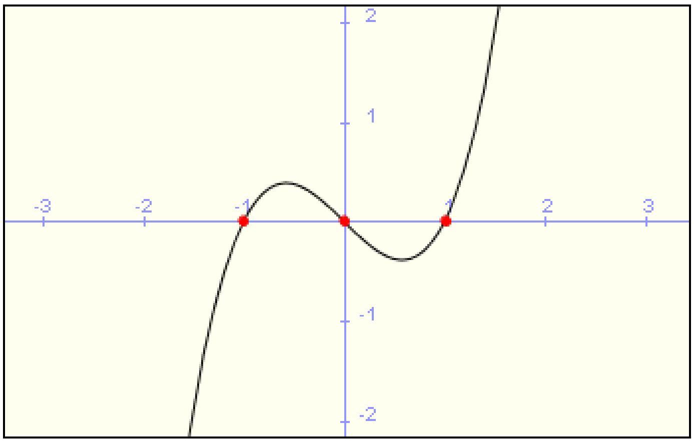


Discontinuïtat asimptòtica en x = 4 (asímptota vertical)

f) <u>Creixement / decreixement. Màxim i mínim relatiu</u>

Es defineix respecte a les x

Ex:



Creixent: $(- \infty , \frac{-1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, + \infty)$

Decreixent: $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$

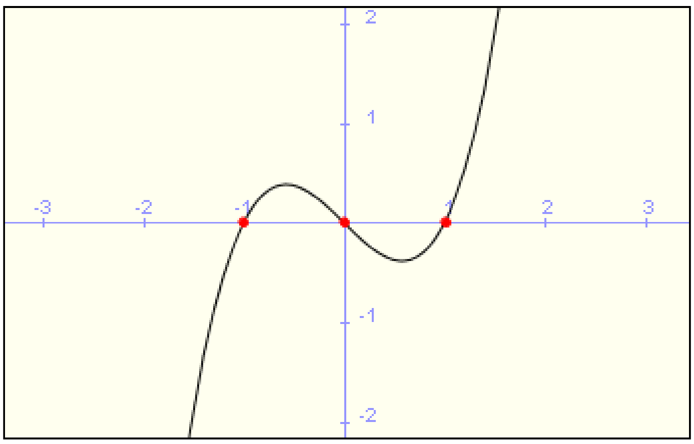
Màxim relatiu: $(\frac{-1}{2} , \frac{1}{3})$

Mínim relatiu: $(\frac{1}{2}, \frac{-1}{3})$

g) <u>Concavitat / convexitat. Punts d'inflexió</u>

Es defineix respecte les x

Ex:



f(x) és convexa: $(- \infty , 0)$

còncava: $(0 , + \infty)$

punt d'inflexió: $(0 , 0)$

Operacions amb funcions

a) Suma
b) Resta
c) Producte
d) Divisió

Composició de funcions

Donades dos funcions f: A → B i g: B → C, on la imatge de f està continguda en el domini de g, es defineix la funció composició (g o f): A → C com (g o f)(x) = g[f(x)]

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ x & & f(x) & & g[f(x)] \end{array}$$

Ex:

f: $R \to R$ $\quad$ $x \to \dfrac{1}{x}$

g: $R \to R$ $\quad$ $x \to \sqrt{x}$

Aleshores

$$x \xrightarrow{f} \frac{1}{x} \xrightarrow{g} \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

Ex: Si f(x) = x + 3 i g(x) = $\dfrac{3x}{x+2}$, trobeu

a) $(g \circ f)(4) = g[f(4)] = g[7] = \dfrac{21}{9} = \dfrac{7}{3}$

b) $(g \circ f)(-2) = g[f(-2)] = g[1] = \dfrac{3}{3} = 1$

c) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x+3] = \dfrac{3(x+3)}{x+3+2} = \dfrac{3x+9}{x+5}$

• Observacions:

a) L'expressió (g o f)(x) es llegeix " f composta amb g"

b) En general $g(f(x)) \neq f(g(x))$

c) La funció I : x $\longrightarrow$ x rep el nom de *funció identitat*

Funció inversa o reciproca

S'anomena funció reciproca o inversa de *f* una altra funció que es designa per f^{-1} que compleix la condició següent

$$\text{Si } f(a) = b \leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

Per calcular f^{-1} cal intercanviar la variable x per y ($y = f(x) \rightarrow x = f(y)$) i aïllar la y de l'expressió

Ex: Trobeu la funció reciproca de la funció $f(x) = x^3 - 6$

$$f(x) = x^3 - 6 \rightarrow x = y^3 - 6 \rightarrow x + 6 = y^3 \rightarrow y = \sqrt[3]{x+6} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+6}$$

• Observacions:

a) Les funcions f i f^{-1} verifiquen que :

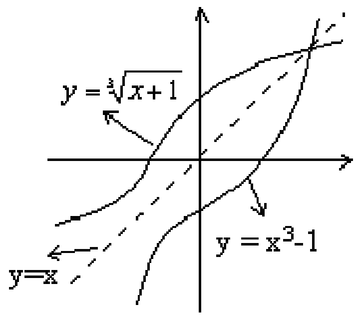
$$(f \circ f^{-1})(x) = I(x) \leftrightarrow (f \circ f^{-1})(x) = x$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = I(x) \leftrightarrow (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

I(x) funció identitat

Ex: En el cas anterior

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left[\sqrt[3]{x+6}\right] = \left[\sqrt[3]{x+6}\right]^3 - 6 = x + 6 - 6 = x$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left[f\ (x)\right] = f^{-1}\left[x^3 - 6\right] = \left[\sqrt[3]{x^3 + 6 - 6}\right] = \sqrt[3]{x^3} = x$$

b) Les gràfiques de f i f^{-1} són simètriques respecte a la recta y = x, es a dir, respecte a la bisectriu del primer quadrant



Funcions polinòmiques

Funcions polinòmiques

Tipus	Fórmula	Gràfic	Pendent	Punts de tall	Exemple
Constant	y = b	Recta horitzontal	0	(nº , b)	y = 2 recta horitzontal que passa per (0,2) i (1,2)

Funcions polinòmiques de 1r grau

Tipus	Fórmula	Gràfic	Pendent	Punts de tall	Exemple
Afí	y = ax + b	Recta obliqua creixent si a > 0 decreixent si a < 0	a	(0 , b) $(\frac{-b}{a}, 0)$	y = 3x + 2 recta creixent que passa per (0,2) i $(\frac{-2}{3},0)$
Lineal	y = ax			(0 , 0) (1 , a)	y = -x recta decreixent que passa per (0,0) i (1,-1)

• El pendent indica el grau d'inclinació de la recta, quant més gran és el seu valor absolut més vertical és.

Funció polinòmica de 2n grau

Tipus	Fórmula	Gràfic	Vèrtex	Exemple
Completa	$y = ax^2 + bx + c$	Paràbola còncava si a > 0 convexa si a < 0	$(\frac{-b}{2a}, \dots)$	$f(x) = x^2 - 2x + 1$ paràbola còncava (a = 1) amb vèrtex a (1 , 0)
Incompleta	$y = ax^2 + bx$ $y = ax^2 + c$			$y = -2x^2 + 5$ paràbola convexa (a = - 2) amb vèrtex a (0, 5)

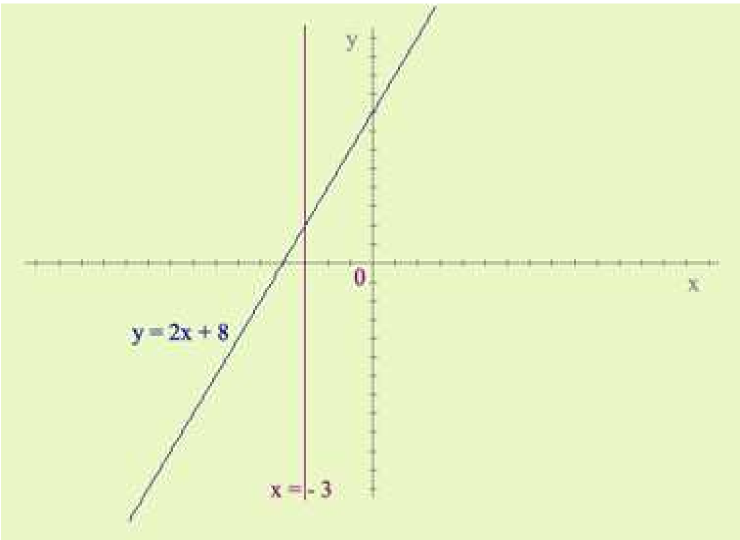
Funció de proporcionalitat inversa

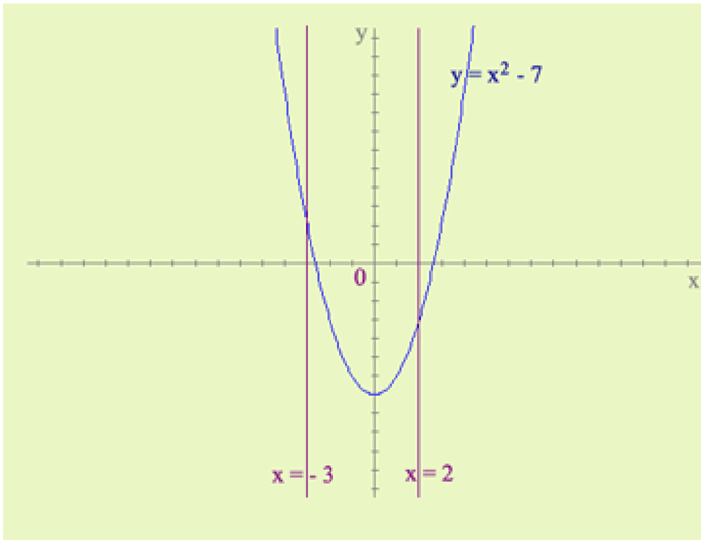
Fórmula	Gràfic	Exemple
$y = \frac{k}{x}$ amb $k \in \mathbb{R}$	Hipèrbole a 1r i 3r quadrant si k>0 Decreixent a 2n i 4t quadrant si k<0 Creixent	$y = \frac{2}{x}$ hipèrbole decreixent

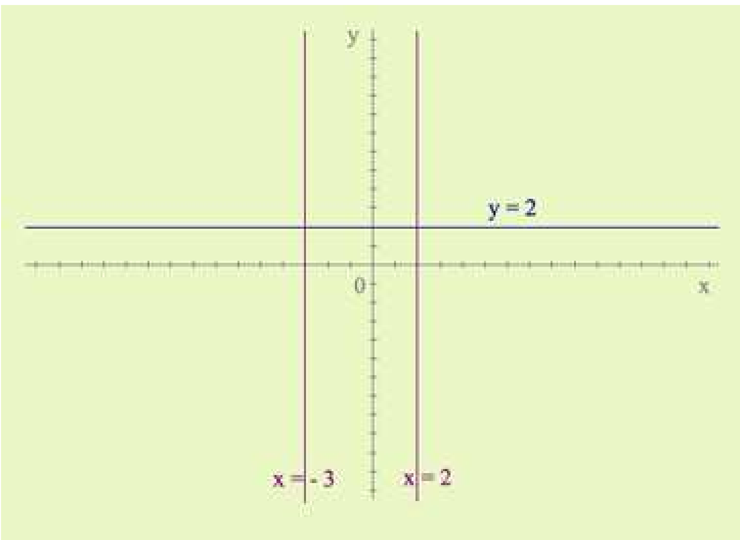
Funcions definides a trossos
Són funcions on la fórmula varia segons els intervals del domini.
Ex:

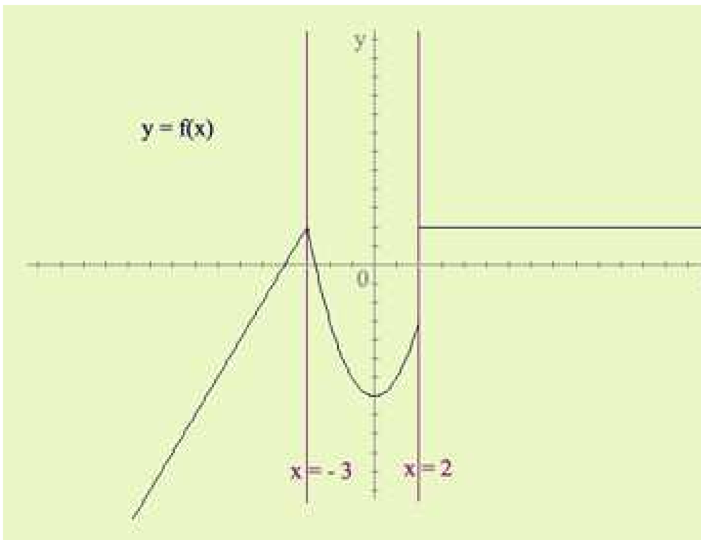
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 8 & \text{si} \quad x < -3 \\ x^2 - 7 & \text{si} \quad -3 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$$

Es tracta de dibuixar cada funció i després mantenir el gràfic en l'interval corresponent



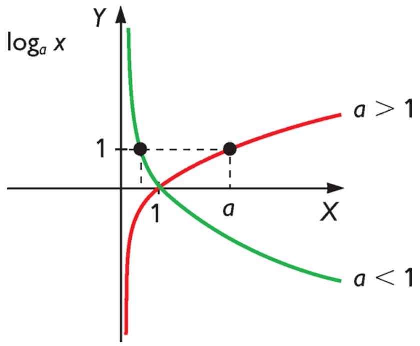






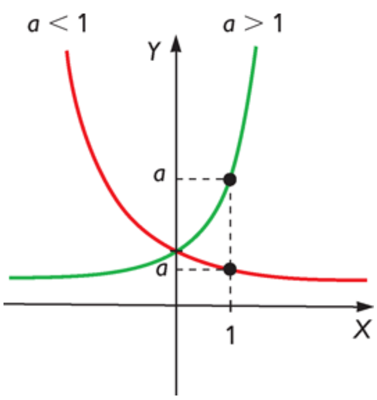
Funcions logarítmiques $\qquad f(x) = \log_a x$ per $a > 0$

a>1	Característiques	0<a<1
$(0,+\infty)$	Domini	$(0,+\infty)$
$\mathbb{R}$	Recorregut	$\mathbb{R}$
(1,0)	Punts de tall	(1,0)
No hi ha	Simetria	No hi ha
Si	Continuïtat	Si
Creixent	Creixement/Decreixement	Decreixent



Funcions exponencials $\qquad f(x) = a^x$ per $a > 0$

a>1	Característiques	0<a<1
$\mathbb{R}$	Domini	$\mathbb{R}$
$(0,+\infty)$	Recorregut	$(0,+\infty)$
(0,1)	Punts de tall	(0,1)
No hi ha	Simetria	No hi ha
Si	Continuïtat	Si
Creixent	Creixement/Decreixement	Decreixent



• Les funcions $f(x) = \log_a x$ i $g(x) = a^x$ (per $a > 0$) són inverses, per la qual cosa els seus gràfics són simètrics respecte a la bisectriu del primer quadrant.

Funció valor absolut

La variable es troba en un valor absolut

Ex:

f(x) = | x + 1 |

• Hem de transformar aquestes funcions en funcions definides a trossos per poder treballar. Els intervals venen definits per aquells valors on l'expressió de dins el valor absolut és igual a 0.

Ex: $f(x) = | x |$

$x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

ja que, per exemple, per x = - 2 f(-2) = |-2| = - (-2) = 2

Ex: $f(x) = | x + 2 |$

$x + 2 = 0$
$x = - 2$

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2) & x < -2 \\ x+2 & x \geq 2 \end{cases}$$

Ex: $f(x) = | x - 3 | + | x + 1 |$

$x - 3 = 0 \qquad x = 3$
$x + 1 = 0 \qquad x = - 1$

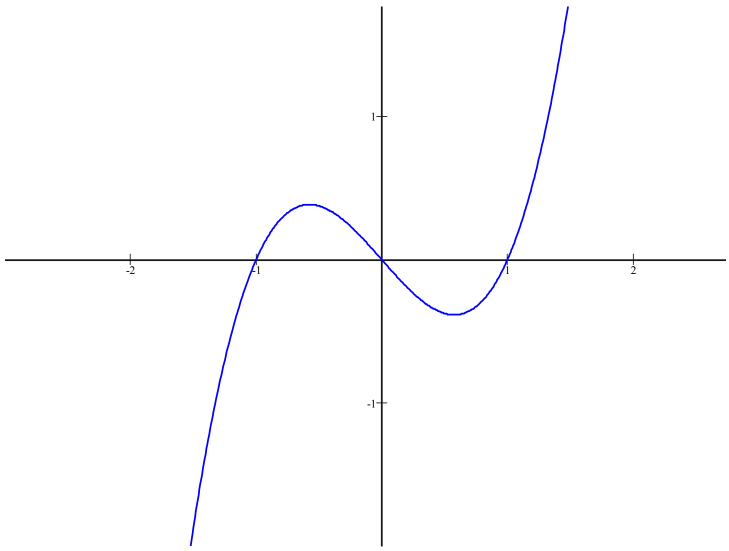
$$f(x) = \begin{cases} -(x-3)-(x+1) & x < -1 \\ -(x-3)+(x+1) & -1 \leq x \leq 3 \\ (x-3)+(x+1) & 3 < x \end{cases}$$

Translació, contracció i dilatació de funcions

<table>
<tr><td>Funció</td><td></td><td colspan="3">Respecte al gràfic de f(x)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f(x) \pm k$</td><td rowspan="2">Desplaçament vertical</td><td>k unitats amunt
f(x)+k</td><td rowspan="2">Recorregut canvia
Punts de tall canvien</td><td rowspan="4">La forma no canvia</td></tr>
<tr><td>k unitats avall
f(x)-k</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f(x \pm k)$</td><td rowspan="2">Desplaçament horitzontal</td><td>k unitats a l’esquerra
f(x+k)</td><td rowspan="2">Recorregut no canvia
Punts de tall canvien</td></tr>
<tr><td>k unitats a la dreta
f(x-k)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">k·f(x)</td><td>k>1
Dilatació vertical</td><td colspan="2" rowspan="2">Recorregut canvia
Punts de tall canvien</td><td>El gràfic s’allarga</td></tr>
<tr><td>0<k<1
Contracció vertical</td><td>El gràfic s’escurça</td></tr>
<tr><td rowspan="2">f(k·x)</td><td>k>1
Contracció horitzontal</td><td colspan="2" rowspan="2">Recorregut canvia
Punts de tall canvien</td><td>El gràfic es contrau</td></tr>
<tr><td>0<k<1
Dilatació horitzontal</td><td>El gràfic es dilata</td></tr>
</table>

Ex:

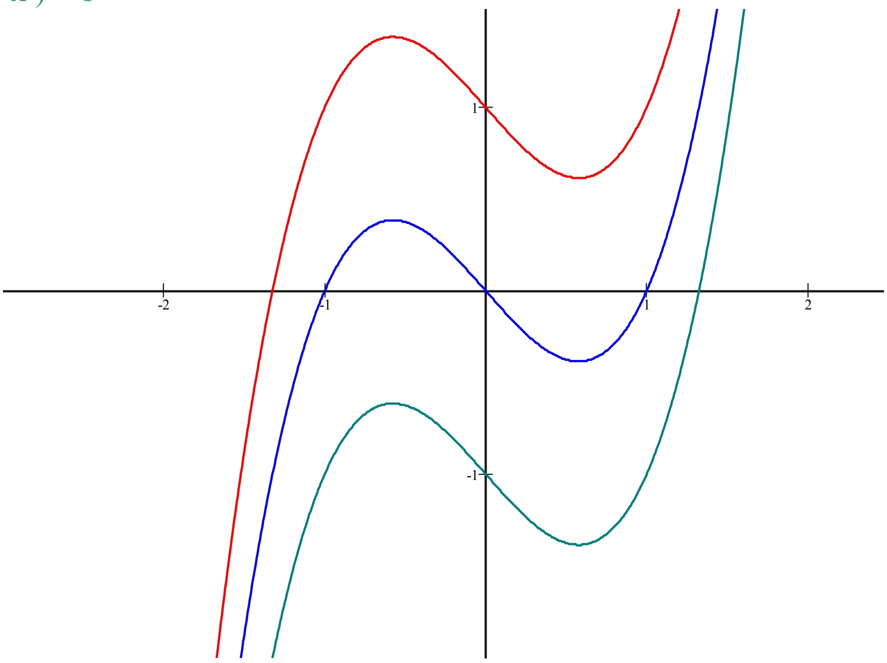
$$f(x) = x^3 - x$$



$y = (x^3 - x)$

$y = (x^3 - x) + 1$

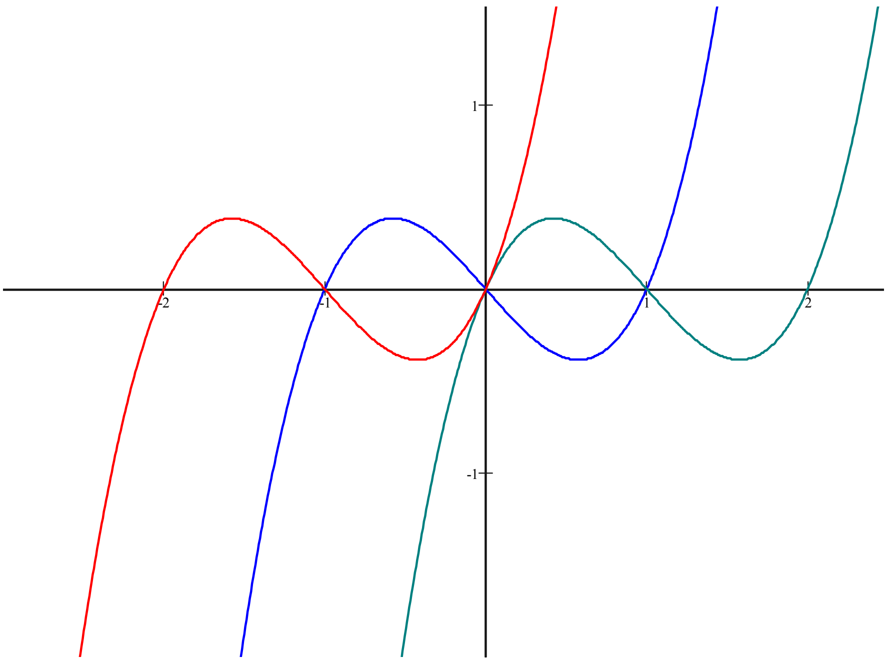
$y = (x^3 - x) + 1$



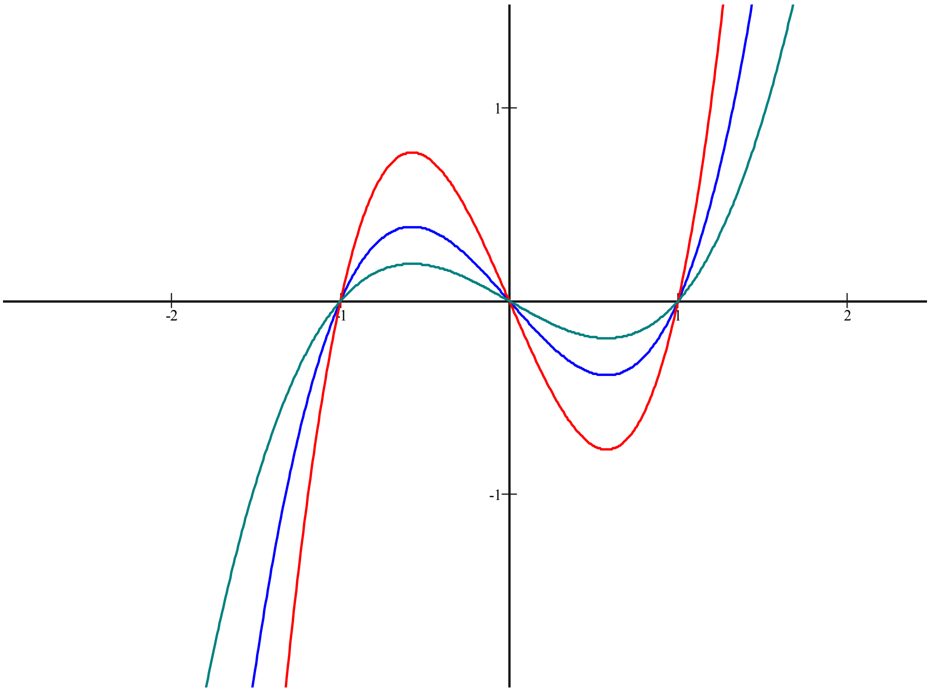
$y = (x^{3} - x)$

$y = (x + 1)^{3} - (x + 1)$

$y = (x + 1)^{3} - (x + 1)$



$y = (x^3 – x)$
$y = 2 (x^3 – x)$
$y = 0,5 (x^3 – x)$



$y = (x^3 – x)$
$y = (2x)^3 – (2x)$
$y = (0,5x)^3 – (0,5x)$