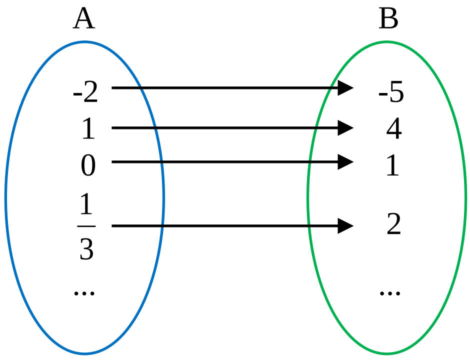
Tema 5: FUNCIONS

Funció

S'anomena funció real de variable real a tota aplicació que fa correspondre a cada element d'un conjunt inicial o domini **un i només un** element d'un conjunt final o recorregut.

Ex: Sigui la funció f



$$f: A \rightarrow B$$
$$a \rightarrow f(a)$$

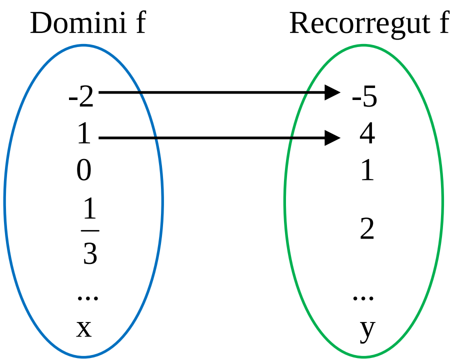
$$-2 \rightarrow -5$$
$$1 \rightarrow 4$$
$$0 \rightarrow 1$$
$$\frac{1}{3} \rightarrow 2$$

on

A – domini

B - recorregut

Una funció indica una **relació de dependència** entre dos magnituds numèriques anomenades variables. Cada valor individual de la primera magnitud, *x* o variable independent, s'anomena **anti-imatge** i a cada valor corresponent de la segona magnitud, *y* o variable dependent, **imatge**. En l'exemple anterior,



la imatge de x= -2 és y = -5

$f(2) = -5$

la anti-imatge de y= -5 és x = -2

$f^{-1}(-5) = -2$

• A matemàtiques, en no parlar de magnituds concretes (temps, espai, nombre d'individus, ...), les lletres amb les que es treballen són

x, per definir la variable o magnitud independent

y, per la variable o magnitud depenent

Això fa que sembli que aquest tema no sigui aplicable a altres disciplines, tot el contrari. Les matemàtiques tracten de forma general i en abstracte relacions de dependència que hi ha al nostre voltant sense concretar de què es parla.

• Les funcions no s'expressen a través de conjunts sinó que poden estar definides per:

- un **enunciat** o text
- una **taula de valors**, on es mostra els valors que adopta la variable independent x_i i els corresponents de la variable dependent y_i
- un **gràfic** determinat pels punts P (x_i , y_i)
- una **fórmula** que indica la relació entre les variables

Ex: "Un vehicle circula a una velocitat constant de 80 Km/h"

Aquest enunciat ens indica una relació de dependència entre:

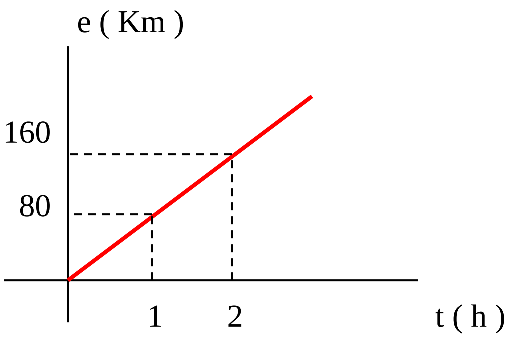
t (temps) que és la variable independent x

e (espai recorregut) que és la variable dependent y

Es a dir,
si està una hora circulant en aquestes condicions recorrerà 80 Km
si està dues hores recorrerà 160 Km
si està ....

Temps (h)	1	2	2,5	3
Espai (Km)	80	160	200	240

Gràficament,



Aquesta mateixa funció podria definir-se amb la fórmula: e = 80t que en llenguatge matemàtic correspondria a y = 80x o f(x) = 80x,

Així,

la imatge de 2, és el valor de *y* que li correspon a *x* = 2, es a dir

$$f(x) = 80x$$
$$y = 80x$$
$$y = 80 \cdot 2 = 160$$
$$f(2) = 160$$

mentre que l’antiimatge de 240, o el valor de *x* que li correspon a *y* = 240 serà $f^{-1}(240)$

$$f(x) = 80x$$
$$y = 80x$$
$$240 = 80 \cdot x$$
$$\frac{240}{80} = x$$
$$x = 3$$

$$f^{-1}(240) = 3$$

• No tots els gràfics corresponen matemàticament a una funció ja que cal recordar la condició de que a cada valor de *x* només li pot correspondre un valor de *y*
Ex: Quins dels gràfics següents correspon a una funció?

a) b)

El gràfic b no correspon a una funció ja que a un valor de x, per exemple, a x = -2 li corresponen dos valors de y, y = 0 i y = 3

Característiques de les funcions:

a) Domini
b) Recorregut
c) Punts de tall amb els eixos
d) Simetria
e) Continuïtat
f) Creixement / decreixement
g) Concavitat / convexitat

a) Domini:

- conjunt inicial
- conjunt de valors que pot prendre la *x* (el càlcul de la fórmula és possible o és coherent amb les condicions)

Ex: “ Lloguem un apartament per una temporada per 500€ mensuals “ ,

x = nombre de mesos de lloguer

y = preu pagat

el nombre de mesos *x* no pot ser un nombre negatiu ni decimal, així que el domini seran tots els nombres enters positius

Ex : f(x) = $\frac{2}{x}$, el domini seran tots els nombres reals menys el 0 ja que $\frac{2}{0}$ no existeix

Funció	Domini	Hem de ….	Dom f
Polinòmica	|R	-	|R
Fracció algebraica	Tots els nombres menys els que facin 0 el denominador ja que $\frac{\Re}{0}$ no existeix	Solucionar l’equació denominador = 0	|R – { solucions de l’equació }
Arrel d’índex parell	Tots els nombres menys els que facin que el radicand sigui negatiu	Solucionar l’inequació radicand ≥ 0	Solucions de l’inequació
Arrel d’índex senar	|R	-	|R

Ex:

f(x) = x – 1 *funció polinòmica*

Dom f = |*R*

Ex:

$g(x) = \frac{2}{x+3}$ *fracció algebraica*

x + 3 = 0

x = - 3

Dom g = |*R – { - 3 }*

Ex:

y = x – 1 *arrel quadrada (índex parell)*

x – 1 $\geq$ *0*

x $\geq$ *1*

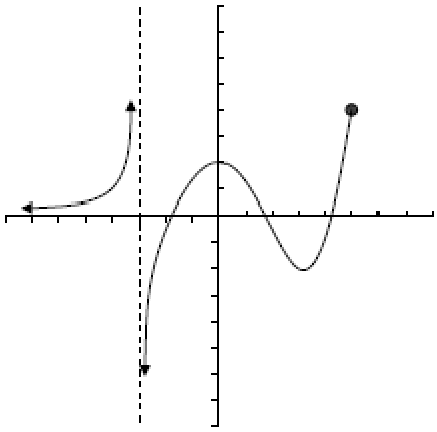
Dom = [1 , + ∞ *)*

Ex:

f(x) = $\sqrt[3]{2x-1}$ *arrel cúbica (índex senar)*

Dom f = |*R*

• A nivell gràfic el domini és la projecció de tots els punts del gràfic sobre l'eix x



$Dom = (-\infty,-3) \cup (-3,5]$

b) Recorregut

- Conjunt final
- Conjunt de valors que pren la *y* (resultats obtinguts en aplicar la fórmula als valors numèrics de *x*)

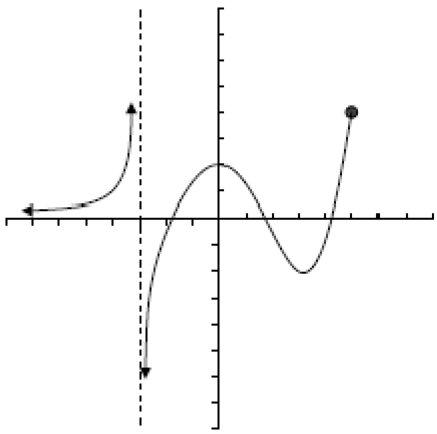
Ex: Quin és el recorregut de $f(x) = x^2 - 2$?

El domini de la funció són tots els nombres reals ja que és una funció polinòmica.

y = (qualsevol nº)^2 – 2
y = nombre positiu - 2

Im f = [- 2 , + ∞)

• A nivell gràfic el recorregut és la projecció de tots els punts del gràfic sobre l'eix y



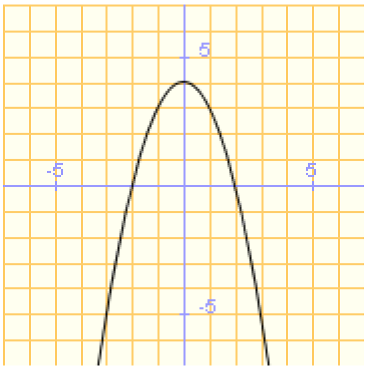
$Im = (-\infty,+\infty)$

c) Simetria

Una funció pot tenir o no simetria.

Si hi ha simetria aquesta pot ser de dos tipus:

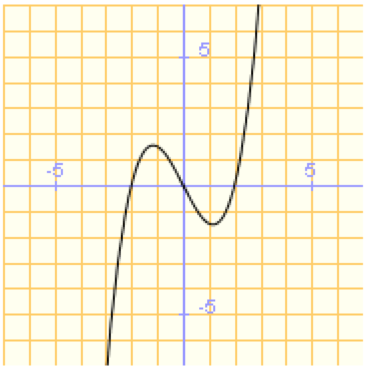
- Parella: el gràfic és simètric respecte l'eix d'ordenades Y;



Observem que numèricament això implica que **f(x) = f(-x).**
Per exemple,

x = 1	f (1) = 3
x = - 1	f (- 1) = 3

- Imparella o senar: el gràfic és simètric respecte l'origen de coordenades (0,0).



Numèricament, **f(-x) = - f(x)**.
Per exemple,

x = 3	f (3) = 7
x = - 3	f (- 3) = - 7 = - f (3)

Per saber si una funció presenta simetria normalment treballarem comparant les fórmules.

f(x)	la fórmula de la funció
f(-x)	la fórmula que s'obté en substituir *x* per – *x*
-f(x)	canviant de signe la fórmula

Ex :

$y = x^4 + 2$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^4 + 2 \\ f(-x) = (-x)^4 + 2 = x^4 + 2 \end{array}\right\}$$
$-f(x) = - x^4 - 2$

simetria parella

Ex:

$z = 4t^3 + t$

$f(t) = 4t^3 + t$
$$\left.\begin{array}{l} f(-t) = 4(- t)^3 +(- t) = - 4t^3 - t \\ - f(t) = - (4t^3 + t) = - 4t^3 - t \end{array}\right\}$$

simetria senar

Ex:

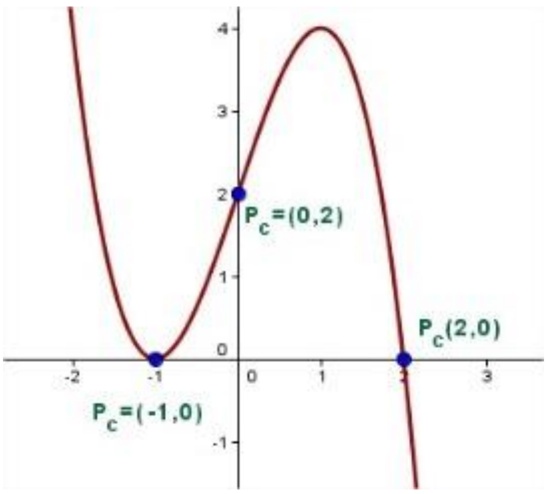
$g(x) = x + 2$

$g(x) = x + 2$
$g(-x) = x + 2$
$-g(x) = - (x + 2) = - x - 2$

no té simetria

d) Punts de tall amb els eixos

Observem el gràfic. Els punts de tall amb l'eix x (d'abscisses) tenen valor de y = 0, mentre que els punts de tall amb l'eix y (d' ordenades) tenen valor de x = 0.



Per això, per trobar els punts de tall amb

- l'eix x, substituïm *y* per 0 i trobem el valor de *x* solucionant l'equació;
- eix y, fem $x = 0$ i trobem *y*

Ex: Punts de tall amb els eixos de la funció $f(x) = \frac{2x+5}{x^2}$

punts de tall amb l'eix x: y = 0

$$\frac{2x+5}{x^2} = 0$$

$$2x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-5}{2} \qquad \left(\frac{-5}{2}, 0\right)$$

punts de tall amb l'eix y: x = 0

$$y = 2 \cdot 0 + \frac{5}{0^2} \qquad y = \frac{5}{0}$$

No hi ha

• Com a màxim hi ha un punt de tall amb l'eix y, sinó no serà una funció

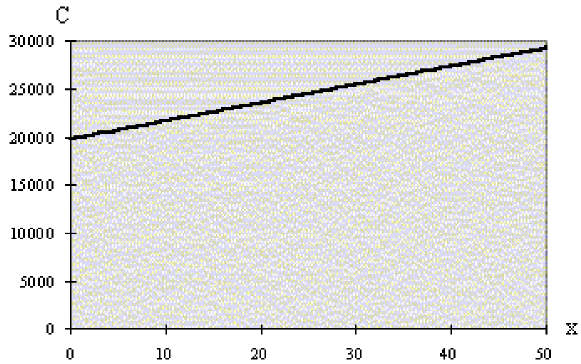
e) Continuïtat

Una funció és contínua si es pot dibuixar el gràfic amb un sol traç, es a dir, sense aixecar el llapis del paper. Una funció és discontínua si te més d'un traç.

Ex: Una fàbrica de gel té unes despeses mensuals (y) que depenen del nombre de tones produïdes en un mes (x), segons la fórmula

$$y = 19801{,}5 + 189{,}67\,x$$

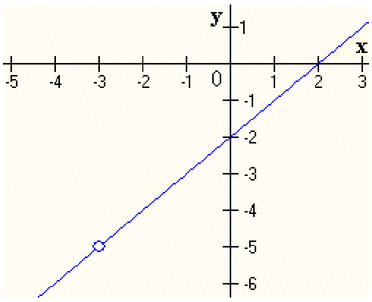
de manera que si fem una taula de valors i representem gràficament els resultats, donat que es poden unir els punts per què és possible qualsevol valor de producció de gel (x) entre 0 i 50 tones, el gràfic ens mostra que és una funció contínua



• La continuïtat s’expressa en forma d’interval pels valors de x , a la vegada que s’indiquen els tipus de discontinuïtat si hi ha.

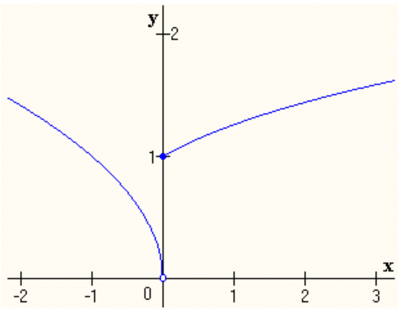
• Hi ha diferents tipus de discontinuïtat:
- evitable,
- de salt
- asimptòtica

i) Discontinuïtat evitable. Gràficament apareix com un “forat” a la gràfica.
Ex:



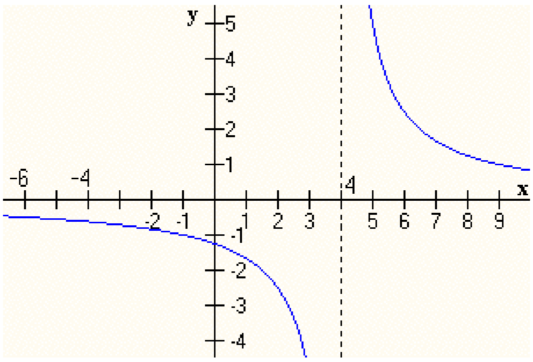
Discontinuïtat evitable en (-3 , 5)

ii) Discontinuïtat de salt. S’indica el valor de la *x* on hi ha el canvi
Ex:



Discontinuïtat de salt en x = 0

iii) Discontinuïtat asimptòtica.
Ex:



Discontinuïtat asimptòtica en x = 4 (asímptota vertical)

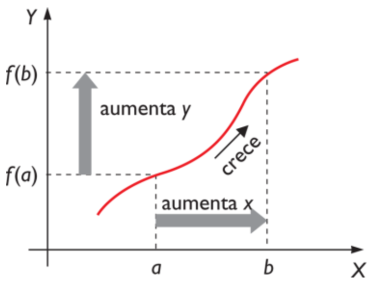
f) Creixement / decreixement. Màxim i mínim relatiu i absolut.

Una funció és creixent en un tram, o interval de valors de x, si quan augmenta el valor de x augmenta el valor de y. Una funció és decreixent en un interval de valors de x si quan augmenta el valor de x disminueix el valor de y.

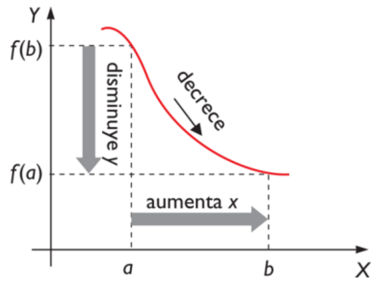
Es a dir,

donada la funció definida a l'interval (a,b), si per a qualsevol parell de punts de l'interval, de manera que $x_1 < x_2$, es compleix que:

- $f(x_1) < f(x_2)$ la funció és **creixent** a l'interval (a,b)
- $f(x_1) > f(x_2)$ la funció és **decreixent** a l'interval (a,b)
- $f(x_1) = f(x_2)$ la funció és **constant** a l'interval (a,b)

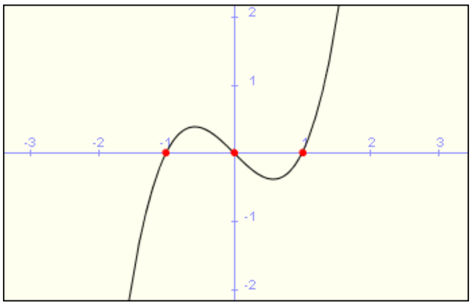


Creixent en (a,b)



Decreixent en (a,b)

Ex:

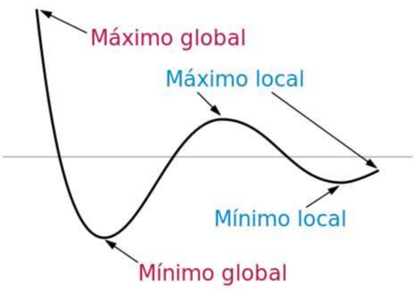


Creixent: $(-\infty , \frac{-1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

Decreixent: $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$

Màxims i mínims. Són punts on la funció canvia el seu comportament. Una funció presenta un màxim en un punt si en ell passa de ser creixent a decreixent. Una funció presenta un mínim en un punt si en ell passa de ser decreixent a creixent.

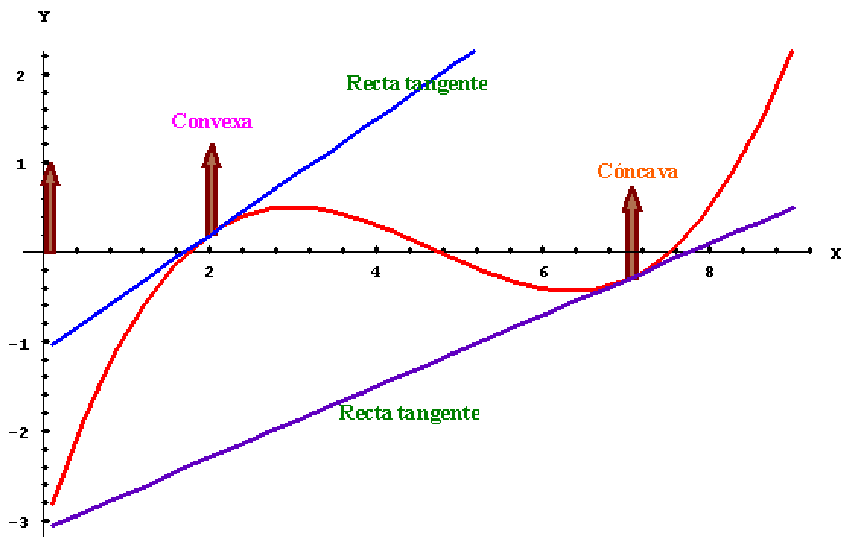
Per altre banda cal diferenciar entre màxim/mínim absolut i relatiu (o local)



En el punt on la *y* té el seu valor màxim diem que hi ha un màxim global o absolut, mentre que en el punt on la *y* té el seu valor més petit diem que hi ha un mínim global

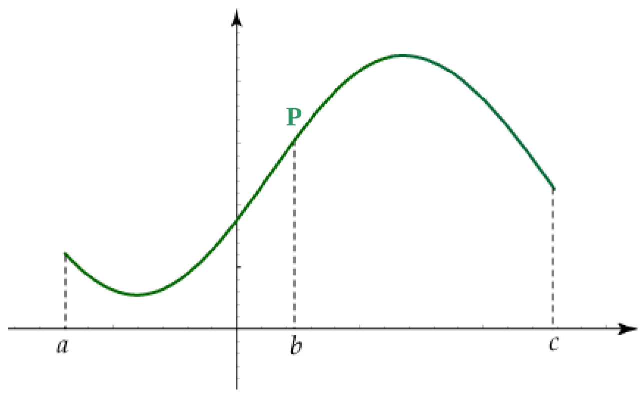
g) Concavitat / convexitat. Punts d'inflexió

Una funció és **còncava en un punt** si la recta tangent en aquest punt queda per sota de la gràfica de la funció, i és **convexa en un punt** si la recta tangent queda per sobre de la gràfica.



Una funció és **còncava en un interval** si és còncava en tots els punts de l'interval, i **és convexa en un interval** si és convexa en tots els punts de l'interval. Els intervals de concavitat / convexitat es defineixen respecte l'eix x

Ex:



Còncava : (a , b)
Convexa: (b , c)

Els punts en els quals la funció passa de còncava a convexa o a la inversa reben el nom de **punts d'inflexió**. En l'exemple anterior el punt d'inflexió serà **P**

“Tendències”. Introducció al concepte de límit.

De vegades interessa estudiar el comportament d’una funció f(x) quan s’aproxima a determinats valors o quan la el valor de x augmenta o disminueix “infinitament”.

Ex: Sigui la funció $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$

a) Què passa amb f(x) quan x augmenta indefinidament?

x	y = f(x)
1000	0,001006024
100000	0,000010001
1000000	0,000001000

Els resultats ens indiquen que quan x augmenta indefinidament (x ⟶ + ∞) el valor de la funció tendeix a 0, f(x) = 0

b) I quan f(x) disminueix indefinidament?

x	y = f(x)
- 1000	- 0,000994024
- 100000	- 0,000009999
- 1000000	- 0,000001000

Els resultats ens indiquen que quan x disminueix indefinidament (x ⟶ -∞) el valor de la funció tendeix a 0, f(x) = 0

c) Què passa amb la funció (amb els valors de *y*) quan *x* s’aproxima a 2?
Hem de diferenciar valors molt propers a 2 però més grans (taula esquerra), i valors molt propers a 2 però més petits (taula dreta).

x	y=f(x)
2,1	-34,44444444
2, 0001	-30004,00040
2,0000001	-30000000,92

x	y=f(x)
1,9	23,36363636
1,9999	29996,00040
1,9999999	29999998,92

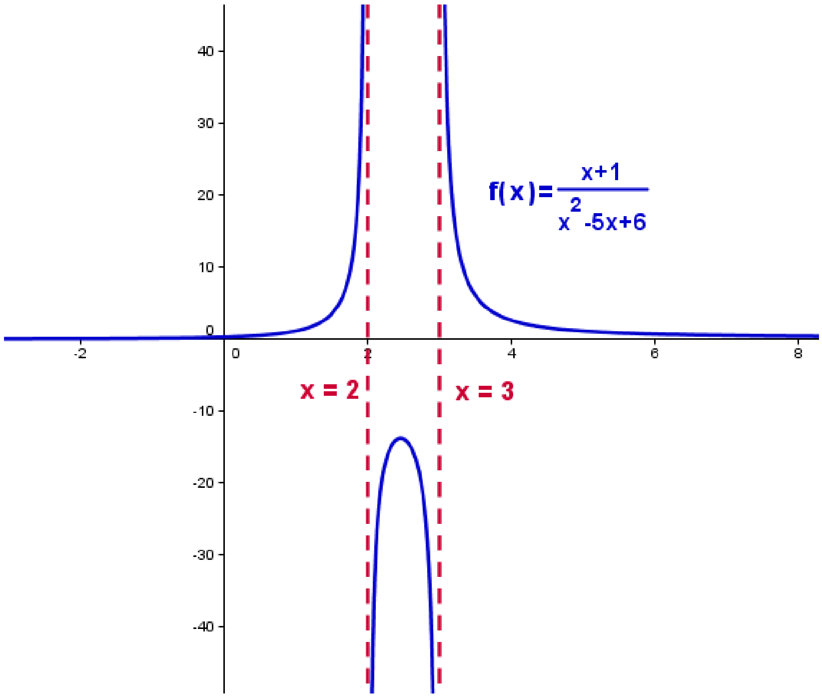
Quan ens apropem a 2 per la dreta el valor de *y* es fa molt i molt petit, diem que f(x) tendeix a -∞

Quan ens apropem a 2 per l’esquerra el valor de *y* es fa cada vegada més gran, diem que f(x) tendeix a + ∞

Per tot això en x= 2 tindrem una asímptota vertical

d) Si estudiem el comportament en a prop de x=3 també trobarem una asímptota vertical.

Gràficament,



Operacions amb funcions

a) Suma

b) Resta

c) Producte

d) Divisió

Es fan les operacions corresponents amb les fórmules

Composició de funcions

Donades dues funcions f: A → B i g: B → C, on la imatge de f està continguda en el domini de g, es defineix la funció composició (g o f): A → C com (g o f)(x) = g[f(x)]

$$\begin{array}{lll} A \xrightarrow{f} & B \xrightarrow{g} & C \\ x & f(x) & g[f(x)] \end{array}$$

Ex:

$$f\colon R \to R \qquad\qquad g\colon R \to R$$

$$x \to \frac{1}{x} \qquad\qquad x \to \sqrt{x}$$

Aleshores

$$x \xrightarrow{f} \frac{1}{x} \xrightarrow{g} \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[\frac{1}{x}] = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

Ex: Si f(x) = x + 3 i g(x) = $\frac{3x}{x+2}$, trobeu

a) $(g \circ f)(4) = g\left[f(4)\right] = g\left[7\right] = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$

b) $(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g\left[x+3\right] = \frac{3(x+3)}{x+3+2} = \frac{3x+9}{x+5}$

• Observacions:

a) L'expressió (g o f)(x) es llegeix " f composta amb g"

b) En general $g(f(x)) \neq f(g(x))$

c) La funció I : x $\longrightarrow$ x rep el nom de *funció identitat*

Funció inversa o reciproca

S'anomena funció reciproca o inversa de f una altra funció que es designa per f^{-1} que compleix la condició següent

Si f (a) = b ↔ f^{-1} (b) = a

Per calcular f^{-1} cal intercanviar la variable x per y (y = f(x) → x = f(y)) i aïllar la y de l'expressió

Ex: Trobeu la funció reciproca de la funció f(x) = $x^3 - 1$

f(x) = $x^3 - 1$ $\rightarrow x = y^3 - 1 \rightarrow x + 1 = y^3 \rightarrow y = \sqrt[3]{x+1} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

• Observacions:

a) Les funcions f(x) i f^{-1} (x) verifiquen que :

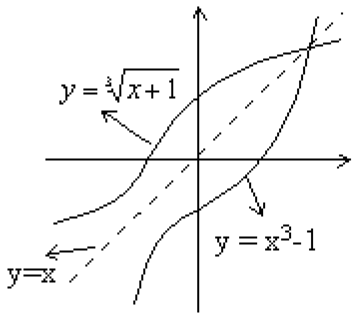
$$(f \circ f^{-1})(x) = I(x) \leftrightarrow (f \circ f^{-1})(x) = x$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = I(x) \leftrightarrow (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

I(x) funció identitat

Ex: En el cas anterior

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left[\sqrt[3]{x+1}\right] = \left[\sqrt[3]{x+1}\right]^3 - 1 = x + 1 - 1 = x$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left[f\ (x)\right] = f^{-1}\left[x^3 - 1\right] = \left[\sqrt[3]{x^3 + 1 - 1}\right] = \sqrt[3]{x^3} = x$$

b) Les gràfiques de f(x) i f^{-1} (x) són simètriques respecte a la recta y = x, es a dir, respecte a la bisectriu del primer quadrant



Tipus de funcions

1. Polinòmiques
2. De proporcionalitat inversa
3. Definides a trossos

1. Funcions polinòmiques

La fórmula correspon a un polinomi

Funcions polinòmiques de grau 0

Tipus	Fórmula	Gràfic	Pendent	Punts de tall	Exemple
Constant	y = b	Recta horitzontal	0	(nº , b)	y = 2 recta horitzontal que passa per (0,2) i (1,2)

Funcions polinòmiques de 1r grau

Tipus	Fórmula	Gràfic	Pendent	Punts de tall	Exemple
Afí	y = ax + b	Recta obliqua creixent si a > 0 decreixent si a < 0	a	(0 , b) $(\frac{-b}{a}\ , 0)$	y = 3x + 2 recta creixent que passa per (0,2) i $(\frac{-2}{3},0)$
Lineal	y = ax			(0 , 0) (1 , a)	y = -x recta decreixent que passa per (0,0) i (1,-1)

• El pendent indica el grau d'inclinació de la recta, quant més gran és el seu valor absolut més vertical és.

Funció polinòmica de 2n grau

Tipus	Fórmula	Gràfic	Vèrtex	Exemple
Completa	$y = ax^2 + bx + c$	Paràbola còncava si $a > 0$ convexa si $a < 0$	$\left(\frac{-b}{2a} , \ldots \right)$	$f(x) = x^2 - 2x + 1$ paràbola còncava (a = 1) amb vèrtex a (1 , 0)
Incompleta	$y = ax^2 + bx$ $y = ax^2 + c$			$y = -2x^2 + 5$ paràbola convexa (a = - 2) amb vèrtex a (0, 5)

• Per fer el gràfic podem trobar els punts de tall amb els eixos i si no tenim prou dades podem trobar altres punts del gràfic i tenir en compte que una paràbola és simètrica respecte al eix vertical pel que passa el seu vèrtex.

Ex: Representeu gràficament $f(x) = x^2 + 2x - 3$

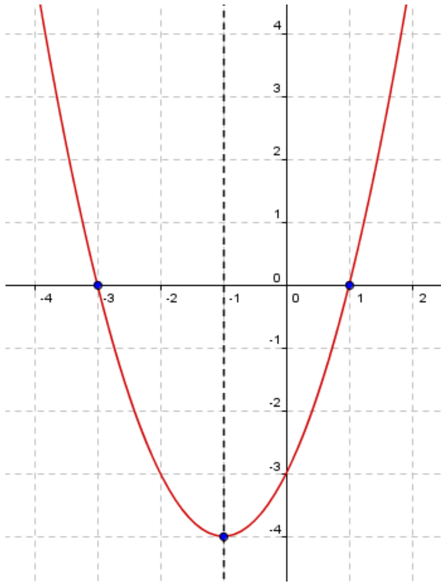
Funció polinòmica de 2n grau
Paràbola còncava ($a = 1 > 0$)
Punts de tall amb els eixos

$x = 0$ $\qquad y = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$ $\qquad (0 , -3)$

$y = 0$ $\qquad 0 = x^2 + 2x - 3 \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$ $\qquad (1,0)$ $\quad (-3,0)$

$V = \left(\frac{-b}{2a} , \ldots \right)$ $\qquad V = \left(\frac{-2}{2 \cdot 1} , \ldots \right) = (-1 , -4)$

$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$



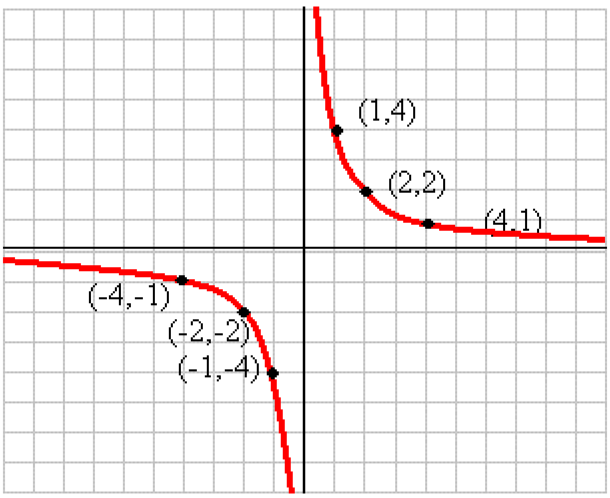
2. Funció de proporcionalitat inversa

Fórmula	Gràfic	Exemple
$y = \frac{k}{x}$ amb $k \in \mathbb{R}$	Hipèrbole a 1r i 3r quadrant si k>0 Decreixent a 2n i 4t quadrant si k<0 Creixent	$y = \frac{2}{x}$ hipèrbole decreixent

• Per fer aquests gràfics fem una taula de valors tenint en compte que en x=0 hi ha una asímptota vertical

Ex: $f(x) = \frac{4}{x}$

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	-1	-2	-4	4	2	1



3. Funcions definides a trossos

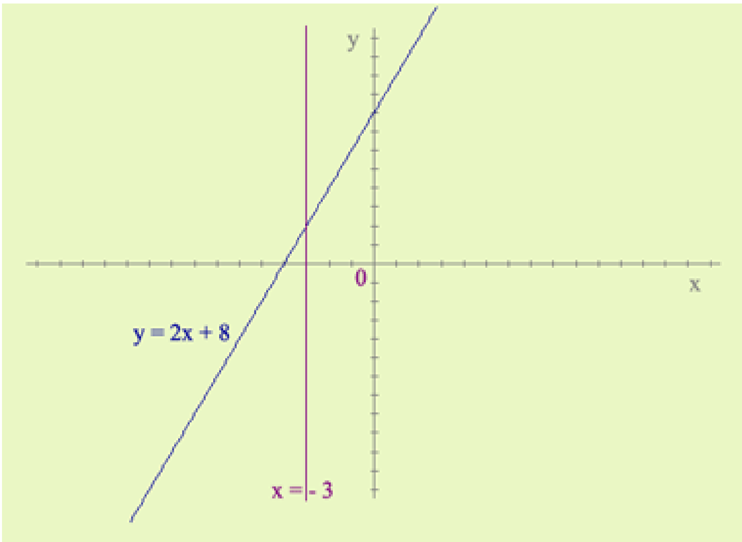
Són funcions on la fórmula varia segons els intervals del domini.

Ex:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 8 & \text{si} \quad x < -3 & \text{i)} \\ x^2 - 7 & \text{si} \quad -3 \leq x \leq 2 & \text{ii)} \\ 2 & \text{si} \quad 2 < x & \text{iii)} \end{cases}$$

Es tracta de dibuixar cada funció i després mantenir el gràfic en l'interval corresponent. És important trobar els punts finals i inicials de cada tram si és possible (*)

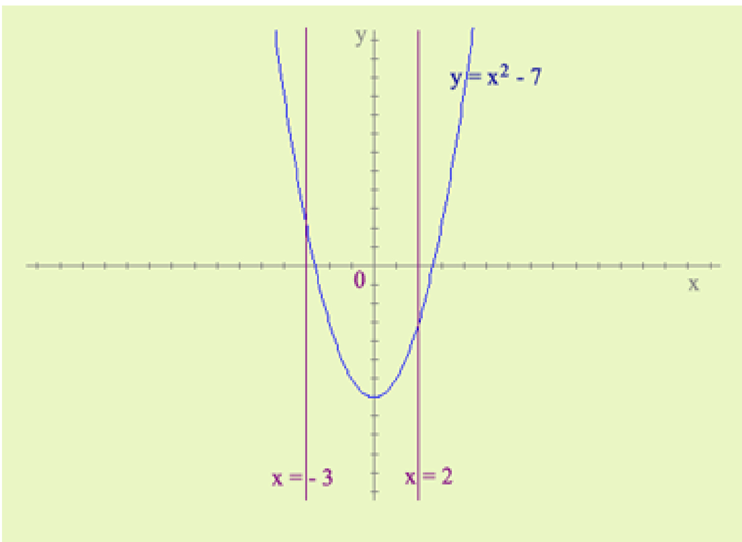
i)



y = 2x + 8

Recta creixent (pendent m = 2 > 0)
Punts de pas: (0 , 8) , (4 , 0) , (- 3 , 2) *

ii)



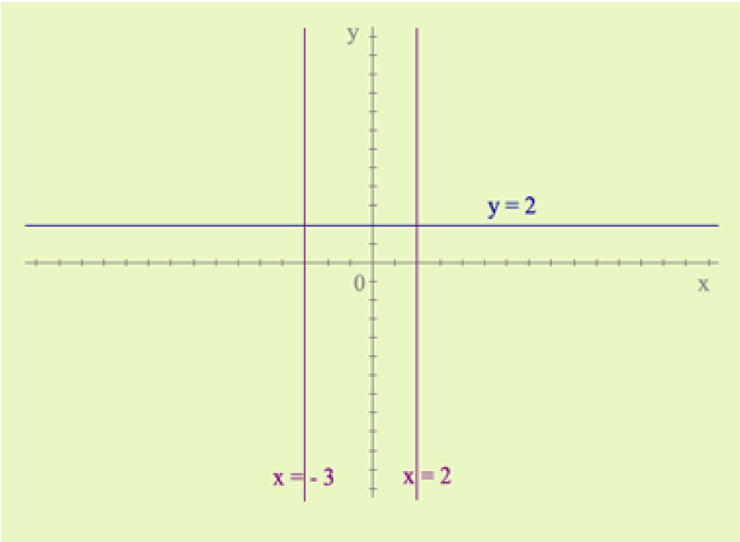
$y = x^2 - 7$

Paràbola cóncava (a = 1 > 0)

$V = (\frac{-b}{2a}, ...) = (\frac{-0}{2 \cdot 1}, ...) = (0, -7)$

$x = -3$	$y = (-3)^2 - 7 = 2$	(- 3 , 2)*
$x = 2$	$y = 2^2 - 7 = -3$	(2 , - 3)*

iii)



y = 2
Recta horitzontal
*(2 , 2)**

El gràfic resultant serà