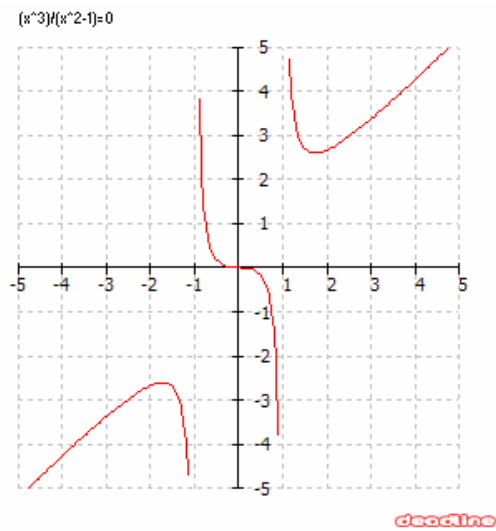


TEMA 5 : Límit de funcions. Continuïtat

Activitats

1. Observeu els gràfics següents i contesteu:

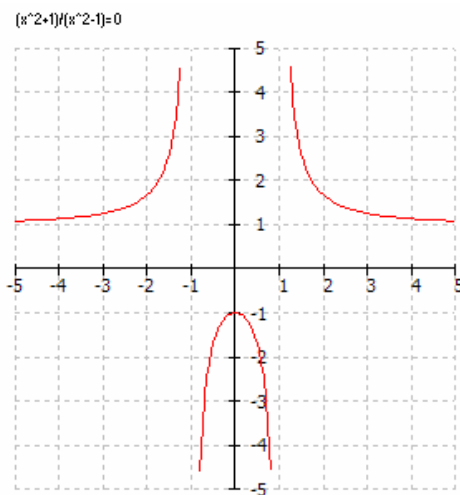
a)



- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

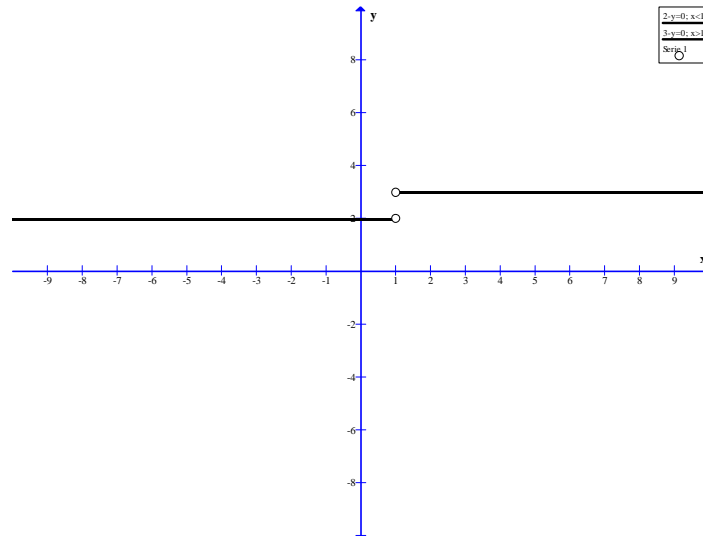
b)



- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

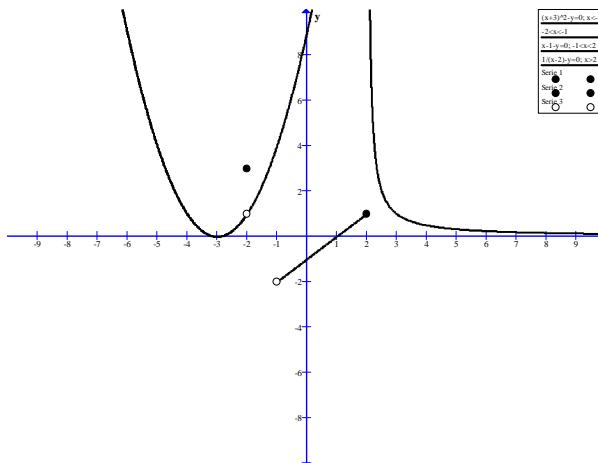
c)



- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

d)



- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

2. Dibuixa el gràfic d'una funció $f(x)$ de la qual sabem :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$
b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$
c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$

3. Dibuixa el gràfic d'una funció $f(x)$ de la qual sabem :

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$
c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$
d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

4. Calculeu el següents límits:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 1}$
b) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 - 9}$
c) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x$
d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2}$
e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)}$
f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$
g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x - 3}$
h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 4x^2 + x + 2}$
i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x}$
j) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2x - 10}$

5. Calculeu el següents límits:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 2x^2}{x^2 + 1}$
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 2x^2}{2x^3 + 1}$
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2}{x^5 + 1}$
d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2}$
e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x-2)(x+1)}{(x-2)(2x+3)}$
f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x + 1}{-x^2 - 1}$
g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 - 8x + 6}{x^4 - 2x - 3}$
h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{2x^2 - 5}}$
i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$
j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 + 3}}{\sqrt{2x^3}}$

6. Calculeu el següents límits:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 6x + 1)$	2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x + 1)$	3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + x)$
4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^2 - a^2}$	5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1}$	6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right)$
7) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1}$	8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{x^2 - 4x + 4}}$	9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{-2x^4 + 3x^3 - 6}$
10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2}$	11) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x}$	12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{2x^2 - 6x}$
13) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^2}{x^5 + 1}$	14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^5 + x^2}{2x^2 - 1}$	15) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$
16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x}}$	17) $\lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt[3]{x^2 + 2} - x)$	18) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$
19) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x-1}{2x-4} \right)^{\frac{1}{x-3}}$	20) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 2} - 4}$	21) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x+1}$
22) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}$	23) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 5x}{x^4 - x^3 + x - 1}$	24) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+1)^3}{(x+3)^4}$
25) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4}{x^4 + 4x^3 + 4x^2}$	26) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 + x - 2}{x^3 + 4x^2 - 11x - 2}$	27) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 6x^2 + 8x - 3}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}$
28) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4} - \frac{x^2-4}{x-2} \right)$	29) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+2}{\sqrt{x+3} - 1}$	30) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{\sqrt{x+3} - 1}$
31) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{\sqrt{x+3} - 1}$	32) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+3} - 1}$	33) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{\sqrt{x+3} - 1}$
34) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^x$	35) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$	36) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)^{\frac{1}{x}}$
37) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2x+7}{1-x} \right)^{\frac{1}{x+2}}$	38) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2-1}{3x^2+5} \right)^{x^3}$	39) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2x-5}{3x-6} \right)^{\frac{-1}{x-4}}$
40) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2x-5}{3x-6} \right)^{\frac{1}{(x-4)^2}}$	41) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x-x^2}{x-2x^2} \right)^{\frac{x}{x^3-1}}$	42) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2x-5}{3x-6} \right)^{\frac{1}{(x-4)^2}}$

43) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x+3}{7x^2+3} \right)^{\frac{-1}{x^2}}$	44) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x^4 - 7x^2}}{2x + \sqrt{18+x}}$	45) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x^3 + x}}{4x^2 + x}$
46) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{25 - x^2}{x - \sqrt{x^2 + x} - 5}$	47) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 - 5})$	48) $\lim_{x \rightarrow 81} \frac{x - 81}{\sqrt{x} - 9}$

2. Estudieu la continuïtat de les següents funcions definides a trossos, en cas de que no siguin contínues, indiqueu els punts i el tipus de discontinuïtat

a) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x \leq -1 \\ x + 2 & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ 7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < -2 \\ -7 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 2^x & \text{si } -11 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

3. Quin valor ha de tenir k en cada una de les següents funcions perquè aquestes siguin contínues?

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 2 \\ -x + k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 4x}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ k & \text{si } x = -2 \end{cases}$

4. Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Trobeu a i b per tal que la funció sigui continua.

5. Calculeu els valors de a i b , que fan continua la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{Si } x < 0 \\ ax + b & \text{Si } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{Si } x > 3 \end{cases}$$