

TEMA 5 : Derivades. Tècniques de derivació

Activitats

1. Calculeu, mitjançant la definició de derivada, la derivada de les funcions següents en els punts indicats:

a) $f(x) = 3x^2$ en $x = 2$

b) $f(x) = x^2 + 4x - 5$ en $x = -1$

c) $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$ en $x = -5$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 2$

e) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en $x = 2$

f) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 3$

2. Calculeu, mitjançant la definició de derivada, la derivada de les funcions anteriors.

3. Calculeu les següents derivades:

a) $f(x) = 3$

b) $f(x) = 5x^3$

c) $f(x) = \frac{5x^3 + 3x - 2}{4}$

d) $f(x) = 5\sqrt{x}$

e) $f(x) = 3\sin x$

f) $f(x) = e^x + 3x - 9$

g) $f(x) = x \cdot \ln x$

h) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot \operatorname{tg} x$

i) $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 4}$

j) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

k) $f(x) = 3^x$

l) $f(x) = \frac{\ln x}{\sin x} + 3x$

4. Calculeu les següents derivades:

a) $f(x) = 3x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + 3\sqrt[3]{x}$

b) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 2 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^3}$

c) $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^3\sqrt{x^2}}$

d) $f(x) = \frac{3x^2\sqrt[4]{x} - 2x\sqrt{x}}{5\sqrt[4]{x^3}}$

e) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x + \sqrt{x} \cos x$

f) $f(x) = 4^x \operatorname{arcsen} x$

g) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt[3]{x^2}} - e^x$

h) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$

i) $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{arctg} x$

j) $f(x) = \frac{5x - 2}{4x^2 - 1}$

k) $f(x) = \frac{x + e^x}{x - e^x}$

l) $f(x) = \frac{x - \operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcsen} x}$

m) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 - \operatorname{arctg} x}$

n) $f(x) = \frac{x + \ln x}{x^3}$

$$\text{o) } f(x) = \frac{\text{sen}x + \cos x}{\text{sen}x - \cos x}$$

$$\text{p) } f(x) = \frac{\text{tg}x - \text{ctg}x}{x \text{sen}x}$$

$$\text{q) } f(x) = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{r) } f(x) = x e^x \text{sen}x$$

$$\text{s) } f(x) = \frac{x^3 \text{sen}x}{\ln x}$$

$$\text{t) } f(x) = \sqrt{x} e^x$$

5. Calculeu les següents derivades:

$$1. \quad y = (4x^3 + 6x - 2)^{17}$$

$$2. \quad y = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 6}$$

$$3. \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 5}}$$

$$4. \quad y = (\text{sen}x - \cos x)^5$$

$$5. \quad y = x(\text{arctg}x)^3$$

$$6. \quad y = (1 - x^2)^5 (\text{arcsen}x)^3$$

$$7. \quad y = \frac{1}{(2x+1)^3}$$

$$8. \quad y = \text{sen}3x + \text{sen}^2 3x$$

$$9. \quad y = \cos^3 x - \cos(x^3)$$

$$10. \quad y = \ln(\text{sen}x)$$

$$11. \quad y = \log(\text{sen} \sqrt{x})$$

$$12. \quad y = \frac{x + \cos \sqrt{x}}{x - \cos \sqrt{x}}$$

$$13. \quad y = \text{arcsen} \sqrt{1 - x^2}$$

$$14. \quad y = \left(\frac{\text{sen}5x + \cos 5x}{\text{sen}5x - \cos 5x} \right)^3$$

$$15. \quad y = \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$$16. \quad y = \text{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$17. \quad y = \text{arcsen} \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$18. \quad y = \text{arcsen}(1 - e^x)$$

$$19. \quad y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1})$$

$$20. \quad y = x^5 e^{-\frac{1}{x^6}}$$

$$21. \quad y = 8^{\text{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$22. \quad y = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x}}$$

$$23. \quad y = \text{arcsen}(1 - x) + \sqrt{2x - x^2}$$

$$24. \quad y = \sqrt{a^2 - x^2} + a \cdot \text{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$25. \quad y = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \text{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$26. \quad y = \frac{\text{arcsen}x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$27. \quad y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 4} - 2 \ln(x + \sqrt{x^2 - 4})$$

$$28. \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$29. \quad y = \ln(\text{arcsen}x) + \text{arcsen}(\ln x)$$

$$30. \quad y = \text{arcsen} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$31. \quad y = \ln\left(\ln\left(\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)\right)$$

$$32. \quad y = \text{sen}^2(\text{sen}^2(\text{sen}^2 x))$$

$$33. \quad y = \cos\left(\frac{1}{\arccos(\text{sen}x)}\right)$$

$$34. \quad y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

$$35. \quad y = \text{arctg}(tg^2 x)$$

6. Calculeu les següents derivades:

a) $y = x^{3x}$

e) $y = \sqrt[3]{\ln x}$

b) $y = x^{x^2}$

f) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

c) $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$

d) $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

g) $y = (2x^2 + 3x - 2)^{\sin x}$

h) $y = (\arctan gx)^{3x-5}$

7. Calculeu la derivada n-èsima de les següents funcions:

a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

d) $f(x) = 2^{5x}$

b) $f(x) = \ln(2-x)$

e) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = \frac{1}{1-3x}$

8. Calculeu les següents derivades implícites:

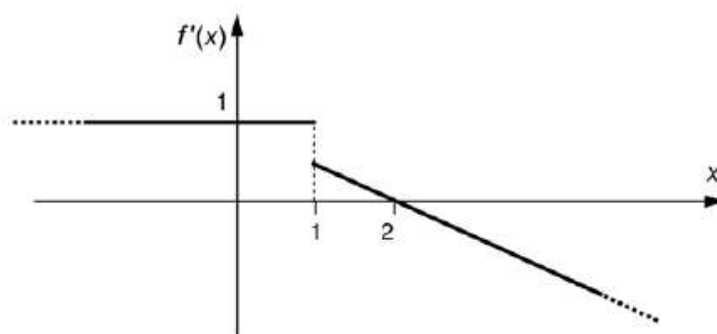
a) $2x^4 - x \cdot y^2 + \sqrt{y} = 3$

b) $x \cdot e^y - 3y^3 + 3x^5 = -4$

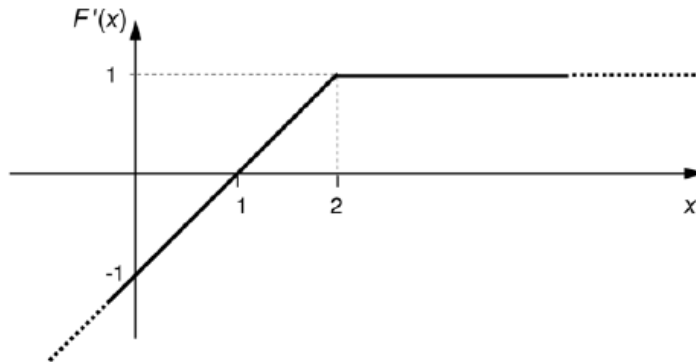
c) $3x^5 - x \cdot \sqrt{y} + y^3 = 6$

d) $x \cdot \ln y - 5y^2 + 2x^3 = -2$

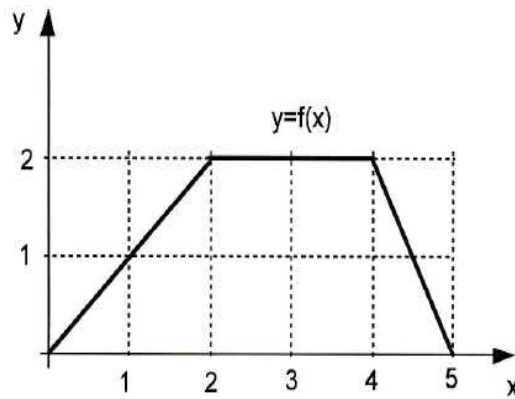
9. La funció derivada $f'(x)$ de certa funció continua $f(x)$ és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix. Digueu si $f(x)$ es derivable en tots els punts i per què.



10. La funció derivada $F'(x)$ d'una funció continua $F(x)$ que passa per l'origen és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix. Escriviu $F(x)$ com una funció definida a trossos.



11. Considereu la funció $y = f(x)$ definida per a $x \in [0, 5]$ que apareix dibuixada a la figura adjunta.



Trobeu l'expressió de la funció derivada quan sigui possible.

12. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

13. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

14. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 2^{x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

15. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció $f(x) = |x - 3|$

16. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$

17. Trobeu els valors de a i b perquè la funció següent sigui derivable:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x + a & \text{si } x \leq 1 \\ bx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

18. Trobeu els valors de m i n perquè la funció següent sigui derivable:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{m}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ 3x + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

19. Trobeu els valors de a i b perquè la funció següent sigui derivable:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

20. Calculeu el punt per al qual la derivada de la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ val 1

21. Trobeu l'equació de la recta tangent i normal a la corba d'equació $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ en el punt d'abscissa $x = 0$. Determineu els punts on la tangent a la corba és horitzontal.

22. Calculeu l'equació de la recta tangent i normal a la corba $f(x) = x^2$ en el punt d'abscissa 2

23. Trobeu una funció de segon grau sabent que passa per punt $P(1,0)$ i que la pendent de la recta tangent en el punt $Q(2,-1)$ val 0.

24. Trobeu una equació de segon grau tal que $f(0) = 2$, $f'(0) = -4$ i $f''(0) = 6$

25. Trobeu una funció $y = f(x)$ que compleix les següents condicions:

- a) $f'(x) = 3x^2 + 4x + 5$
- b) Passa pel punt $P(-2, 6)$

26. Determineu l'equació de la recta tangent a la paràbola d'equació $y = x^2$ paral·lela a la recta d'equació $y = 4x$.

27. Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $f(x) = x^2 - 3x + 4$ paral·lela a la recta d'equació $3x - y = 2$

28. En quin punt de la corba de la funció $f(x) = x \cdot \ln x - x$, la pendent de la recta tangent val 1.

29. En quins punt la tangent a la corba $f(x) = 6x^3 + 9x^2 - 2$ és paral·lela a l'eix OX.

30. Determineu m de manera que la tangent a la corba $y = -x^2 - (2m + 1)x + m + 2$ en $x = 2$, sigui paral·lela a la recta $3x - y + 2 = 0$.

31. Sigui la funció $f(x) = x^2 + ax + 3$, determineu el valor de a perquè la gràfica de f tingui una tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ paral·lela a la recta $2x + y = 0$.

32. Determineu l'equació de la recta tangent a $f(x) = x^2 + 4x + 1$ que té una inclinació de 30° .

33. Trobeu les equacions de les rectes tangents a la corba $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$, amb pendent 5. Hi ha alguna amb pendent 1? Hi ha cap valor de pendent al qual correspongui una única recta tangent?.

34. Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ paral·lela a la bisectriu del primer quadrant.

35. Considereu la funció $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$. Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica en el punt d'abscissa $x = 0$. Trobeu si hi ha altres punts en els quals el pendent de la tangent sigui igual al que s'ha obtingut.

36. Donades les funcions $f(x) = x^2 - ax - 4$ i $g(x) = \frac{x^2}{2} + b$

a) Calculeu a i b de manera que les gràfiques de $f(x)$ i de $g(x)$ siguin tangents en el punt d'abscissa $x = 3$, es a dir, que tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt.

b) Trobeu l'equació d'aquesta recta tangent.

