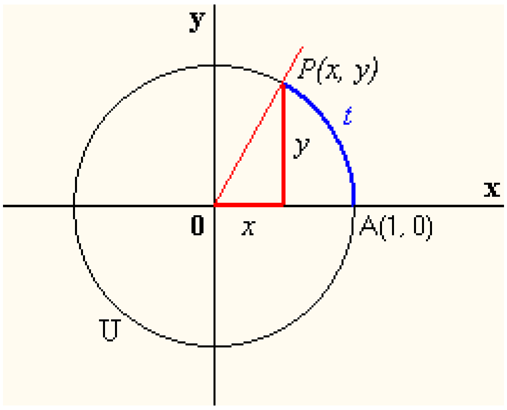
Tema 6: TRIGONOMETRIA

Trigonometria

La trigonometria, és la part de la geometria dedicada a la resolució de triangles , es a dir, a determinar els valors dels angles i dels costats d'un triangle.

Per representar els angles ho farem sobre una circumferència amb centre a l'origen de coordenades i de radi 1. El vèrtex es situa a l'origen i un dels segments de l'angle sobre la part positiva de l'eix x, l'altre es posa seguint el sentit contrari de les agulles del rellotge.

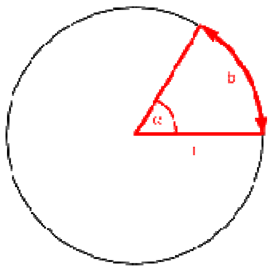
Raons trigonomètriques d'un angle



- sinus (projecció sobre l'eix y)	$\sin \alpha$	$\sin \alpha \in [-1 , 1]$
- cosinus (projecció sobre l'eix x)	$\cos \alpha$	$\cos \alpha \in [-1 , 1]$
- tangent	$\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$	$\tan \alpha \in [-\infty , +\infty]$
- secant	$\sec \alpha = 1 / \cos \alpha$	
- cosecant	$\mathrm{cosec}\, \alpha = 1 / \sin \alpha$	
- cotangent	$\mathrm{cotan}\, \alpha = 1 / \tan \alpha$	

• Observacions :

1. Els angles es mesuren en graus i radians ($360^\circ = 2\pi$ radians)
   Radians. L'arc que mesura mateixa longitud que el radi de la circumferència determina un angle anomenat <u>radian</u> i que es designa per <u>rad.</u>



$$360^o = 2\pi \text{ radians} \;\longrightarrow\; 180^o = \pi \text{ radians}$$

Ex:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} rad \cdot \frac{180^o}{\pi rad} = 60^o$$

2. Cada angle entre 0º i 360º defineix un punt exclusiu P sobre la circumferència en ser representat, es a dir, té un parell de valors que corresponen al sinus i cosinus que l'identifiquen

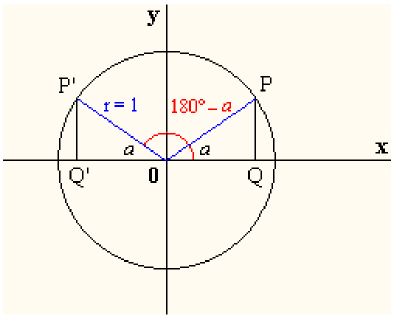
3. A un determinat valor de sinus o cosinus sempre corresponen dos angles entre 0º i 360º

Ex: Si observem la taula veiem que els angles de 60º i 120 º tenen el mateix valor del sinus però que la parella de valors sinus = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ / cosinus = $\frac{1}{2}$ és exclusiva de l'angle de 60º

	30º	45º	60º	120º
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

4. A partir de les raons trigonomètriques dels angles del primer quadrant es pot deduir les d'angles d'altres quadrants. Es tracta de trobar l'angle del primer quadrant de raons trigonomètriques conegudes amb els mateixos valors de sinus i cosinus però de igual o diferent signe.

Ex:



L'angle de 120º es correspon a l'angle de 60º tots dos tenen el mateix sinus però el cosinus és de diferent signe

5. Signe de les raons trigonomètriques segons el quadrant

	1r	2n	3r	4t
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-

Relacions entre raons trigonomètriques

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ *(a partir d'aquesta i amb la definició de tangent es poden resoldre tots els exercicis)*

Relacions entre les raons trigonomètriques d'un angle

Les relacions trigonomètriques fonamentals ens permeten, coneguda una raó trigonomètrica d'un angle, calcular la resta de raons del mateix angle.

Ex: Si cos α = $\frac{3}{5}$, calcula les altres dues raons trigonomètriques:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

(El signe de sinus i tangent dependrà si l'angle pertany al primer o quart quadrant)

Ex: Si tan α = 4 i pertany al 1r quadrant , calcula les altres dues raons trigonomètriques:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow 4 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \sin\alpha = 4\cos\alpha$$

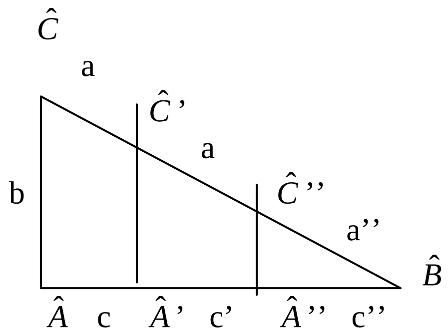
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$(4\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$$
$$16\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$17\cos^2\alpha = 1$$
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{17}} = +\frac{\sqrt{17}}{17}$$
$$\sin\alpha = +4\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}$$

<u>Resolució de triangles rectangles</u>

Resoldre un triangle és trobar el valor dels tres angles i els tres costats. En el cas dels triangles rectangles un dels angles serà sempre conegut, ja que hi ha un que mesura 90º.

Raons trigonomètriques d'un angle agut



Per semblança de triangles:

a) $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''} = k$ constant , aquest valor s'anomena **sinus** del angle $\hat{B}$ i es designa per sin $\hat{B}$

b) $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} = \frac{c''}{a''} = k$ aquest valor s'anomena **cosinus** del angle $\hat{B}$ i es designa per cos $\hat{B}$

c) $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''} = k$ aquest valor s'anomena **tangent** del angle $\hat{B}$ i es designa per tan $\hat{B}$

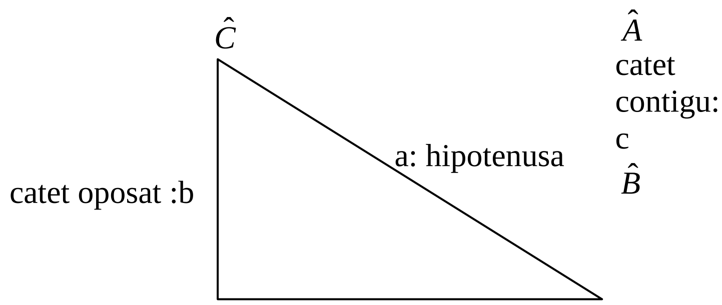
Aquestes raons constants reben el nom de **raons trigonomètriques**.

• En un triangle rectangle, amb la nomenclatura de la figura del marge

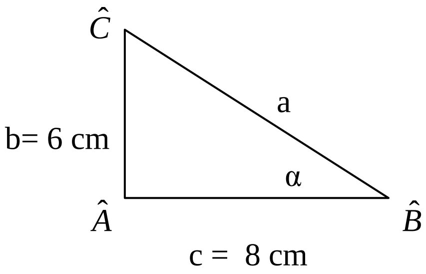
sin $\hat{B}$ = $\dfrac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$

cos $\hat{B}$ = $\dfrac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$

tan $\hat{B}$ = $\dfrac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}} = \dfrac{b}{c}$



Ex: Calcula les raons trigonomètriques de l'angle α



Aplicant Teorema de Pitàgores:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a = \sqrt{36+64} = 10cm$$

$$\sin\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$