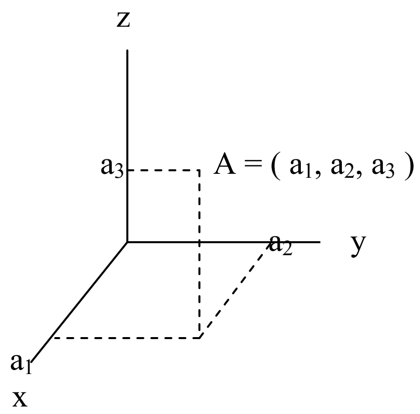
TEMA 7 : GEOMETRIA A L'ESPAI. VECTORS

Vectors a l'espai



$\overrightarrow{AB}$

A = (a_1, a_2, a_3)
B = (b_1, b_2, b_3)

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

• Observacions:
- Dos vectors equipol·lents tenen els mateixos components
- Vector lliure: conjunt de tots els vectors equipol·lents entre ells
- Vector posició: d'entre tots els equipol·lents el que te l'origen a l'origen de coordenades i l'extrem a les components del mateix

Operacions

a) Suma

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$
$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$
$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$$

b) Producte per un escalar

$$k\vec{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$$

$\vec{v}$ i $k\vec{v}$ tenen la mateixa direcció
Si k>0 el mateix sentit i amb k<0 el sentit contrari

c) Vector unitari: $\vec{u}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Espai vectorial
Conjunt de vectors a l'espai: V_3
Espai vectorial: (V, +, •), es a dir V_3 més les operacions amb les seves propietats

Combinació lineal de vectors
Donat $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ d'un espai vectorial V, anomenem combinació lineal d'aquests vectors

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n \qquad (\text{ on } \lambda \in |\mathrm{R})$$

El vector $\vec{v}$ és combinació lineal de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ si existeix $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ tal que

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n$$

Ex: El vector $\vec{v}$ = (5, -6, 2) és combinació lineal de $\vec{v}_1$ = (2, -4, 1) i $\vec{v}_2$ = (1, 2, -3)?

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2$$

$$\left.\begin{aligned} 5 &= \lambda_1 2 + \lambda_2 1 \\ -6 &= \lambda_1 (-4) + \lambda_2 2 \\ 2 &= \lambda_1 1 + \lambda_2 (-3) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 5 &= 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ -6 &= -4\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} 10 &= 4\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ -6 &= -4\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \hline 4 &= \qquad 4\lambda_2 \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = 1$$
$$\lambda_1 = 2$$

$$2 = \lambda_1 1 + \lambda_2 (-3)$$
$$2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) \quad No$$

Dependència i independència lineal de vectors
$\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ són linealment independents si

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

• A l'espai el nombre màxim de vectors linealment independents són 3

Ex: Els vectors $\vec{v}_1 = (2 , -4, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, -2)$, $\vec{v}_3 = (-3, 2, -1)$ i $\vec{v}_4 = (-7, 14, 8)$ són linealment independents?

Com estem a V_3 han de ser linealment dependents

$$\vec{v}_4 = (-7, 14, 8)$$

$$\vec{v}_4 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3$$

$$\left.\begin{aligned} -7 &= \lambda_1 2 + \lambda_2 1 + \lambda_3 (-3) \\ 14 &= \lambda_1 (-4) + \lambda_2 0 + \lambda_3 2 \\ -8 &= \lambda_1 1 + \lambda_2 (-2) + \lambda_3 (-1) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -3 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= 1 \end{aligned}$$

• Rang d'un conjunt de vectors és el nombre màxim de vectors linealment independents

Ex: Quin és el rang de $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (-1, -2, -5)$, $\vec{v}_3 = (3, 4, 5)$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} F_1 + F_2 \\ F_3 - 3F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow F_2 + F_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang = 2

Són linealment dependents

• Tres vectors són linealment independents si el determinant de les seves components és diferent de 0.

Ex: Són linealment independents $\vec{v}_1 = (1, 2, -3)$, $\vec{v}_2 = (2, 3, -1)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, -2)$?

Es pot comprovar per determinants

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$$

Són linealment independents

• Tres vectors són linealment dependents si pertanyen al mateix pla, el qual està definit per dos vectors linealment independents.

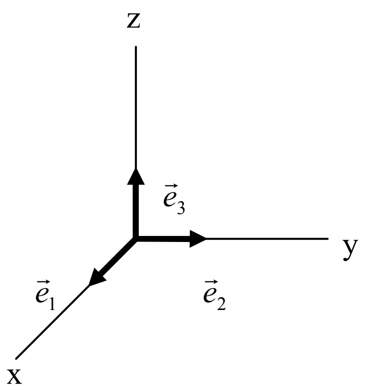
Ex: Els vectors $\vec{v}_1$ = (2, 3, -1), $\vec{v}_2$ = (4, 6, -2), $\vec{v}_3$ = (1, 2, 4) formen un pla?

Com $\vec{v}_2 = 2\ \vec{v}_1$ *podem dir que els vectors són linealment dependents i que pertanyen al mateix pla, a més com* $\vec{v}_3$ *no és combinació lineal de* $\vec{v}_1$ *podem dir que aquests vectors defineixen un pla*

<u>Bases d'un espai vectorial</u>

Una base està formada per vectors linealment independents, de forma que qualsevol vector es pot obtenir com a combinació lineal d'aquests. A l'espai, el nombre de vectors d'una base serà de 3, per aquest motiu tres vectors linealment independents formen una base a V_3.

De totes les bases possibles, la formada pels vectors unitaris que tenen direccions coincidents amb els eixos de coordenades i sentits positius a aquests és la base canònica



$\vec{e}_1$ = (1, 0, 0)
$\vec{e}_2$ = (0, 1, 0)
$\vec{e}_3$ = (0, 0, 1)

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$
$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3$$

Si els vectors de la base són perpendiculars entre si és una base ortogonal. Si són perpendiculars entre si i el mòdul és 1 és base ortonormal.

Ex: Per quins valors de a els vectors $\vec{u}$ = (1, 1, 1), $\vec{v}$ = (1, a, 1) i $\vec{w}$ = (1, 1, a) formen una base?

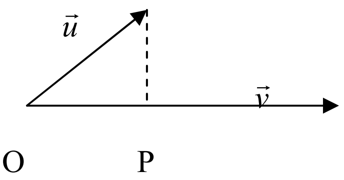
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 1 \neq 0 \quad a \neq 1$$

Per a ≠ 1 els vectors formen base ja que són tres vectors linealment independents

Producte escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

• Observacions:
- Dels dos angles possibles sempre agafem el més petit
- Si un dels vectors és $\vec{0}$ no podem parlar d'angle si be $\vec{v} \cdot \vec{0} = 0$
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ($\vec{u}$ i $\vec{v}$ són ortogonals)
- Interpretació geomètrica

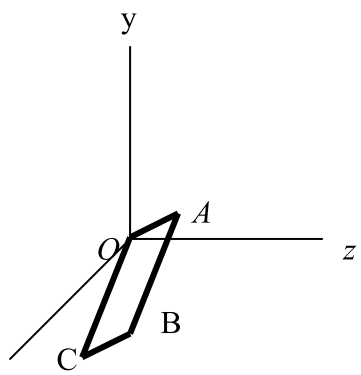


$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$
$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\overline{OP}}{\overline{u}}$$
$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{v}| \cdot \overline{OP}$$

El valor absolut del producte escalar de dos vectors és igual al mòdul d'un dels vectors per la projecció ortogonal de l'altre sobre la direcció del primer

Ex: Sabem que els punts A = (2, 3, 4), B = (7, 6, 2) i C formen amb l'origen de coordenades un paral·lelogram. Trobeu les coordenades de C i determineu els angles del polígon



$\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{CB}$ són equipol·lents

C = (x, y, z)
(2, 3, 4) = (7-x, 6-y, 2-z)

C = (5, 3, -2)

$\overrightarrow{OA}$ *= (2, 3, 4)*
$\overrightarrow{OC}$ *= (5, 3, -2)*

$$\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OC}|} = \frac{11}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{38}}$$

$\hat{O} = \hat{B} =$

$\hat{A} = \hat{C} =$

Ex: Donat $\vec{v} = (\ 2,\ 3,\ -4\ )$ calculeu:

a) la seva projecció ortogonal sobre $\vec{w} = (\ -1,\ 2,\ 1)$

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| = |\vec{w}| \cdot \overline{OP}$$

$$\overline{OP} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

b) el valor de t per tal que $\vec{v}$ sigui perpendicular a $\vec{u} = (\ t,\ -2,\ 3\ )$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$$

$$2 \cdot t + 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot 3 = 0$$

$$t = 9$$

c) angle que forma $\vec{v}$ amb el semieix positiu de les abscisses

$$\vec{e}_1 = (\ 1,\ 0,\ 0\ )$$

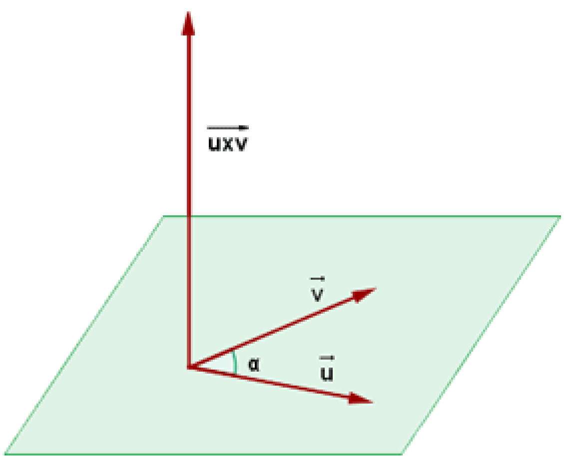
$$\cos(\vec{e}_1, \vec{v}) = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{v}}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\alpha = 68{,}2^o$$

<u>Producte vectorial</u>

Donats dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ el seu producte vectorial és altre vector amb direcció perpendicular als donats i el sentit el corresponent a girar de $\vec{u}$ a $\vec{v}$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$$



El producte vectorial es pot expressar amb un determinant

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

Ex: Calculeu el producte vectorial de $\vec{u}$ = (1, 2, 3) i $\vec{v}$ = (-1, 1, 2)

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot\vec{i}-1\cdot3\cdot\vec{j}+1\cdot1\cdot\vec{k}-(-1)\cdot2\cdot\vec{k}-1\cdot2\cdot\vec{j}-1\cdot3\cdot\vec{i}=\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$$

Ex: Donats els vectors $\vec{u}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ i $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, trobeu el producte vectorial d'aquests vectors. Comproveu que el vector trobat és ortogonal a $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$$

$(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{u}$ (-2, 2, 4) · (3, -1, 1) = - 6 + 2 + 4 = 0

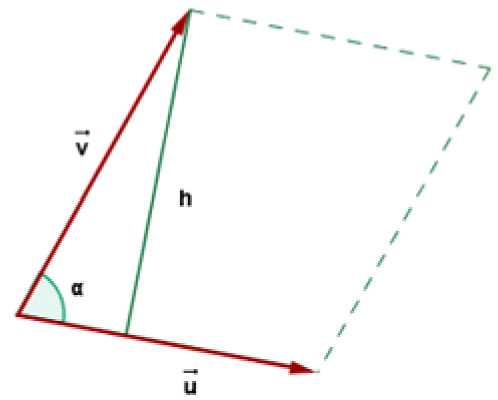
$(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{v}$ (-2, 2, 4) · (1, 1, 1) = - 2 – 2 + 4 = 0

Aplicacions:

a) Àrea del paral·lelogram

Geomètricament, el mòdul del producte vectorial de dos vectors coincideix amb l'àrea del paral·lelogram que té per costats aquests vectors

$$A=|\vec{u}|\cdot h=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha=|\vec{u}\times\vec{v}|$$



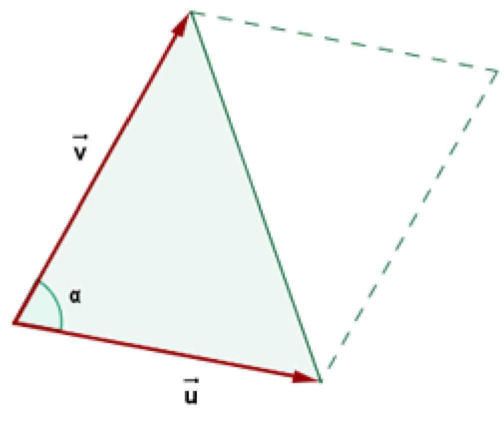
Ex: Donats els vectors $\vec{u} = (\ 3,\ 1,\ -1\ )$ i $\vec{v} = (\ 2,\ 3,\ 4\ )$, trobeu l'àrea del paral·lelogram donat pels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A = \left| \vec{u} \times \vec{v} \right| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294}\, u^2$$

b) Àrea d'un triangle

$$A = \frac{1}{2} \left| \vec{u} \times \vec{v} \right|$$



Ex: Determineu l’àrea d’un triangle amb vèrtexs als punts A = (1, 1, 3), B = (2, -1,5) i C = (-3, 3, 1).

$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2) \qquad \overrightarrow{AC} = (-4, 2, -2)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 0\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\vec{w} = (0, -6, -6)$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\, u^2$$

Producte mixta

El producte mixta de tres vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ és igual al producte escalar del primer vector pel producte vectorial dels altres dos

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)$$

El producte mixta de tres vectors és igual al determinant que té per files les coordenades dels vectors respecte a una base ortonormal

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ex: Calculeu el producte mixta dels vectors

$$\vec{u} = (2,-1,3) \quad \vec{v} = (0,2,-5) \quad \vec{w} = (1,-1,-2)$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (2,-1,3) \cdot (-9,-5,-2) = -18 + 5 - 6 = -19$$

Aplicacions

a) Volum d'un paral·lelepípede

El valor absolut del producte mixta representa el volum del paral·lelepípede amb arestes de tres vectors que coincideixen en un mateix vèrtex

Ex: Trobeu el volum del paral·lelepípede format pels vectors

$$\vec{u} = (3,-2,5) \quad \vec{v} = (2,2,-1) \quad w = (-4,3,2)$$

$$V = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 91u^3$$

b) Volum d'un tetraedre

El volum d'un tetraedre és igual a $\frac{1}{6}$ del producte mixta, en valor absolut

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ex: Calculeu el volum del tetraedre amb vèrtex als punts A = (3, 2, 1), B = (1, 2, 4), C = (4, 0, 3) i D = (1, 1, 7)

$$\overrightarrow{AB} = (1-3, 2-2, 4-1) = (-2, 0, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4-3, 0-2, 3-1) = (1, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (1-3, 1-2, 7-1) = (-2, -1, 6)$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]\right|$$

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 3 - 12 - 4 = 5$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6} u^3$$