

TEMA 8 : Derivades

Activitats

1. Trobeu la taxa de variació mitjana de $f(x) = x^2 + 1$ en els intervals $[0,1]$ i $[-2,-1]$
2. La funció $f(t) = 2,1t^2 + 0,8t - 1$ per $0 \leq t \leq 9$, on el temps t està expressat en anys, proporciona els beneficis d'una empresa en milers d'euros entre els anys 1991 i 2000. Calculeu, de manera raonada, la variació mitjana del benefici en aquest període de temps i en els dos últims anys. Què podem concloure sobre la variació del benefici en els dos períodes anteriors?
3. Calculeu, mitjançant la definició de derivada, la derivada de les funcions següents en els punts indicats:
 - a) $f(x) = 3x^2$ en $x = 2$
 - b) $f(x) = x^2 + 4x - 5$ en $x = -1$
 - c) $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$ en $x = -5$
 - d) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 2$
 - e) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en $x = 2$
 - f) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 3$
4. Calculeu, mitjançant la definició de derivada, la derivada de les funcions anteriors.
5. A partir de la definició calculeu les derivades laterals d'aquestes funcions en $x=2$

$$f(x) = |2 - x| \qquad g(x) = |x^2 - 4|$$

6. Calculeu les següents derivades:

- a) $f(x) = 3$
- b) $y = -2$
- c) $y = x^4$
- d) $f(x) = -x^2$
- e) $f(x) = 5x^3$
- f) $y = 8x + 2$
- g) $f(x) = \frac{5x^3 + 3x - 2}{4}$
- h) $y = \sqrt{x}$
- i) $f(x) = 5\sqrt{x}$
- j) $f(x) = 3\sin x$
- k) $f(x) = e^x + 3x - 9$
- l) $f(x) = 3^x$

7. Calculeu les següents derivades amb la fórmula per la derivada de la funció producte o divisió

a) $f(x) = x \cdot \ln x$

b) $y = x^2 \cdot \cos x$

c) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot \operatorname{tg} x$

d) $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 4}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

f) $f(x) = \frac{\ln x}{\sin x} + 3x$

8. Calculeu les següents derivades aplicant la regla de la cadena

a) $f(x) = (2x + 1)^3$

b) $f(x) = \sin(2x)$

c) $y = \ln(x^2)$

d) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

e) $y = \ln[\sin(3x)]$

f) $y = \left(\sqrt[3]{4x^2 + x}\right)^5$

9. Calculeu les següents derivades:

a) $f(x) = 3x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + 3\sqrt[3]{x}$

b) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 2 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^3}$

c) $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^3\sqrt{x^2}}$

d) $f(x) = \frac{3x^2\sqrt[4]{x} - 2x\sqrt{x}}{5\sqrt[4]{x^3}}$

e) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x + \sqrt{x} \cos x$

f) $f(x) = 4^x \operatorname{arcsen} x$

g) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt[3]{x^2}} - e^x$

h) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$

i) $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{arctg} x$

j) $f(x) = \frac{5x - 2}{4x^2 - 1}$

k) $f(x) = \frac{x + e^x}{x - e^x}$

l) $f(x) = \frac{x - \operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcsen} x}$

m) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 - \operatorname{arctg} x}$

n) $f(x) = \frac{x + \ln x}{x^3}$

o) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

p) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{x \operatorname{sen} x}$

q) $f(x) = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$

r) $f(x) = x e^x \operatorname{sen} x$

s) $f(x) = \frac{x^3 \operatorname{sen} x}{\ln x}$

t) $f(x) = \sqrt{x} e^x$

10. Calculeu les següents derivades:

a) $y = (4x^3 + 6x - 2)^{17}$

b) $y = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 6}$

c) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 5}}$

d) $y = (\text{sen}x - \cos x)^5$

e) $y = x(\text{arctg}x)^3$

f) $y = (1 - x^2)^5 (\text{arcsen}x)^3$

g) $y = \frac{1}{(2x+1)^3}$

h) $y = \text{sen}3x + \text{sen}^2 3x$

i) $y = \cos^3 x - \cos(x^3)$

j) $y = \ln(\text{sen}x)$

k) $y = \log(\text{sen}\sqrt{x})$

l) $y = \frac{x + \cos\sqrt{x}}{x - \cos\sqrt{x}}$

m) $y = \text{arcsen}\sqrt{1-x^2}$

n) $y = \left(\frac{\text{sen}5x + \cos 5x}{\text{sen}5x - \cos 5x} \right)^3$

o) $y = \arccos\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$

p) $y = \text{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

q) $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1})$

r) $y = x^5 e^{-\frac{1}{x^6}}$

s) $y = 8^{\text{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)}$

t) $y = \ln\sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x}}$

u) $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4} - 2\ln(x + \sqrt{x^2 - 4})$

v) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

w) $y = \ln\left(\ln\left(\ln\frac{1-x}{1+x}\right)\right)$

x) $y = \text{sen}^2(\text{sen}^2(\text{sen}^2 x))$

y) $y = \cos\left(\frac{1}{\arccos(\text{sen}x)}\right)$

z) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

11. Calculeu les següents derivades:

a) $y = x^{3x}$

b) $y = x^{x^2}$

c) $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$

d) $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\text{sen}x}}$

e) $y = \sqrt[x]{\ln x}$

f) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

g) $y = (2x^2 + 3x - 2)^{\sin x}$

h) $y = (\text{arctan} gx)^{3x-5}$

12. Trobeu les derivades laterals de les funcions següents en els punts indicats:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x=0$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x=1$

13. Calculeu la derivada n-èsima de les següents funcions:

a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

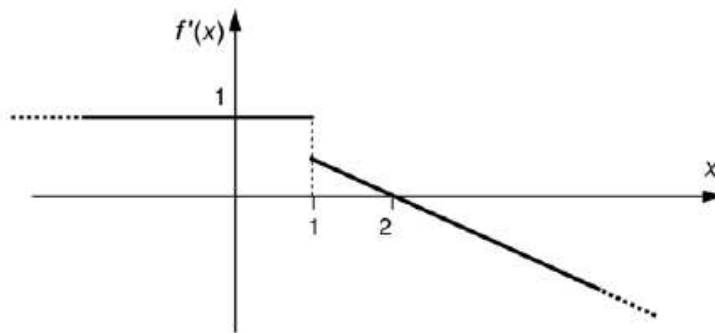
d) $f(x) = 2^{5x}$

b) $f(x) = \ln(2-x)$

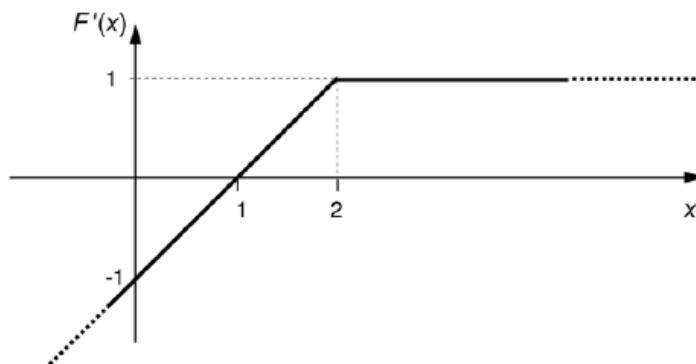
e) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = \frac{1}{1-3x}$

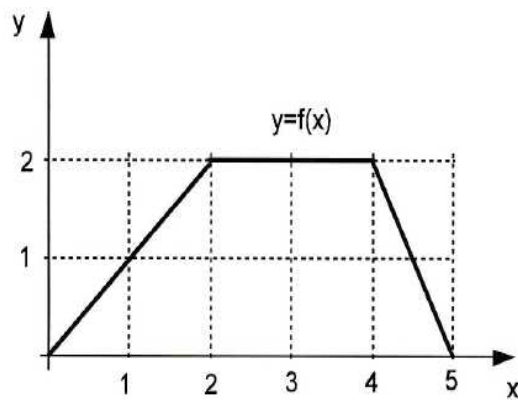
14. La funció derivada $f'(x)$ de certa funció continua $f(x)$ és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix. Digueu si $f(x)$ es derivable en tots els punts i per què.



15. La funció derivada $F'(x)$ d'una funció continua $F(x)$ que passa per l'origen és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix. Escriviu $F(x)$ com una funció definida a trossos.



16. Considereu la funció $y = f(x)$ definida per a $x \in [0, 5]$ que apareix dibuixada a la figura adjunta.



Trobeu l'expressió de la funció derivada quan sigui possible.

17. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 1 \\ -x+3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

18. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

19. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 2^{x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

20. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció $f(x) = |x - 3|$

21. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$

22. Demostreu que la funció següent és contínua en $x=1$ però que no és derivable

$$f(x) = \begin{cases} -1+x & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Aquest resultat contradiu algun teorema estudiat?. Poseu un exemple d'una funció que sigui derivable i discontinua en un punt.

23. Trobeu els valors de a i b perquè la funció següent sigui derivable:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x + a & \text{si } x \leq 1 \\ bx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

24. Trobeu els valors de m i n perquè la funció següent sigui derivable:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{m}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ 3x + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

25. Trobeu els valors de a i b perquè la funció següent sigui derivable:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

26. Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} -4x - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x^2 - 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{k+2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calculeu el valor que ha de tenir el paràmetre k perquè la funció sigui continua en \mathbb{R} i estudeu la derivabilitat per al valor obtingut

27. Sigui la funció f definida per

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Determineu els valors de a i b perquè f sigui derivable

28. Calculeu el punt per al qual la derivada de la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ val 1

29. Calculeu la derivada de les següents funcions i el punt pel qual el valor de la derivada és 0

a) $y = \ln(x^2 + 1)$

b) $y = \ln x^2 + 1$

c) $f(x) = \frac{e^x}{x^3 + 1}$

d) $y = \sqrt{4 + 2^x} + \ln \frac{1}{1 + x}$