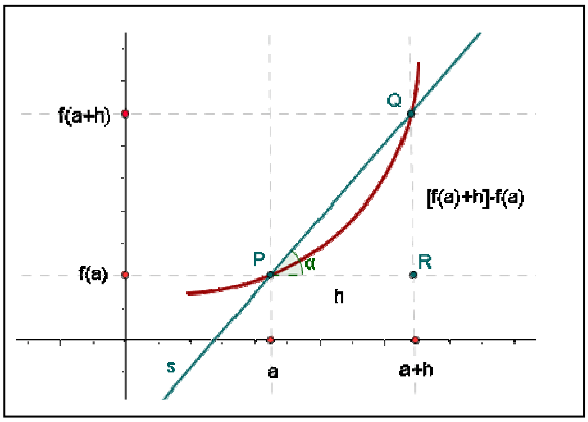
TEMA 8 : Derivades

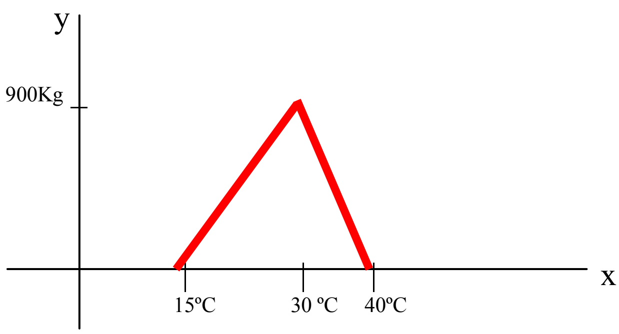
Taxa de variació mitjana

El quocient $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-h} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, s'anomena *taxa de variació mitjana* i significa la variació relativa de f en relació a x en l'interval (a, a + h)



Gràficament és la pendent de la recta que passa pels punts
P (a, f(a)) i Q(a + h, f(a + h))

Ex: Un hivernacle està destinat al conreu de tomàquets. Sabem que les tomaqueres només produeixen fruits si la temperatura dins l'hivernacle està entre 15ºC i 40ºC. En el gràfic següent es mostra la producció de tomàquets en Kg segons la temperatura del hivernacle.



Si la temperatura està entre 15ºC i 29ºC, digues quina serà la variació que experimenta la producció quan la temperatura augmenta 1ºC.

Per calcular la variació em de trobar l'equació de la recta que conté el segment de gràfic que representa la producció (y) des de valors de x de 15 a 30ºC. Aquesta recta passa pels punts (15,0) i (30,900)

$$y = ax + b$$

$$\begin{array}{ll} (15,0) & 0 = 15a + b \\ (30,900) & 900 = 30a + b \end{array}\Bigg\} \qquad \begin{array}{l} 0 = -15a - b \\ \underline{900 = \ 30a + b} \\ 900 = \ 15a \end{array} \qquad a = 60 \qquad b = -900$$

$y = 60x - 900$ *per* $15 < x \leq 30$

Per calcular com varia la producció quan augmenta 1 ºC la temperatura es calcula la taxa de variació mitjana

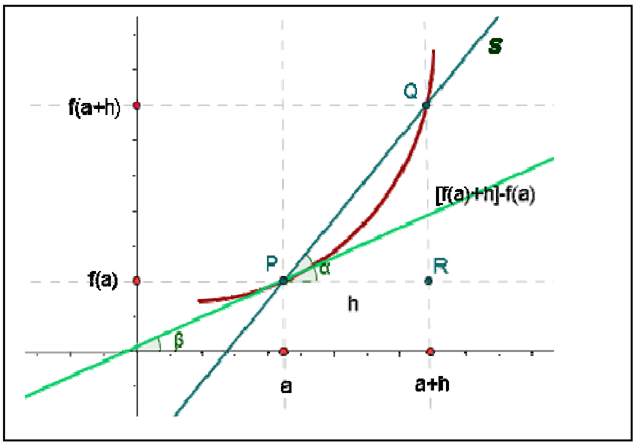
$$TVM([16,30]) = \frac{f(30)-f(16)}{30-16} = \frac{(60\cdot30-900)-(60\cdot16-900)}{30-16} = 60$$

Es a dir, per cada ºC de temperatura que augmenta en aquest interval, la producció augmenta en 60Kg.

Derivada d'una funció en un punt

El límit, $\lim_{h\to0}\frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, si existeix i és finit s'anomena *derivada de la funció f en el punt* $x_0 = a$ i es designa per f'(a).

Gràficament f'(a) significa el pendent de la recta tangent a la gràfica de f(x) en el punt d'abscisses $x_0 = a$



$\boxed{f'(a) = \text{tg } \alpha}$

- Si existeix f'(a) es diu que f és *derivable en* $x_0 = a$

Ex: Si $f(x) = x^2$ trobeu la derivada en $x_0 = 1$

$$f'(1) = \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{1}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = 2$$

Derivades laterals d'una funció en un punt

- S'anomena *derivada per l'esquerra* de f en el punt $x_0 = a$ i es designa per $f'_-(a)$:

$$f'_-(a) = \lim_{h\to0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- S'anomena *derivada per la dreta* de f en el punt $x_0 = a$ i es designa per $f'_+(a)$:

$$f'_+(a) = \lim_{h\to0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- f és derivable en el punt $x_0 = a \Leftrightarrow f'_-(a) = f'_+(a)$

Funció derivada. Derivades successives

- Si una funció f és derivable en tots els punts d'un interval I = (a,b), la funció:

$$f': x \longrightarrow f'(x)$$ s'anomena *funció derivada de f*

- Si f' és derivable, la seva derivada f'' s'anomena segona derivada de f, i així successivament, es defineixen f''', f^{IV}, ..., $f^{(n)}$ (derivada tercera, quarta,.... n-èssima)

Ex: Donada la funció f(x) = 5x – x^2,

$$\bullet\ f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5(x+h)-(x+h)^2-(5x-x^2)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{5x+5h-x^2-2xh-h^2-5x+x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2-2xh+5h}{\cancel{h}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(-h^2-2x+5)}{\cancel{h}} = -2x+5 \quad \to \quad f'(x) = -2x+5$$

$$\bullet\ f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2(x+h)+5-(-2x+5)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2x-2h+5+2x-5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{\cancel{h}} = -2 \quad \to \quad f''(x) = -2$$

$$\bullet\ f'''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h)-f''(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2+2}{h} = 0 \quad \to \quad f'''(x) = 0$$

$$\bullet\ f^{IV} = ... = f^{(n)} = 0$$

Regles de derivació

Operacions amb derivades

Funció	**Derivada**
Producte per un nombre	
$y = k \cdot u$	$y' = k \cdot u'$
Suma i resta	
$y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$
Producte	
$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Quocient	
$y = \dfrac{u}{v}$	$y = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
Composició. Regla de la cadena	
$y = u\ (v\ (x))$	$y' = u'\ (v\ (x)) \cdot v'(x)$

a) Derivada de les funcions elementals

TAULA DE DERIVADES

Funció	**Derivada**	**Exemples**		**Exemples**	
Constant					
y = k	***y'=0***	***y = 8***	***y '= 0***		
Identitat					
y = x	***y' = 1***	***y = x***	***y'=1***		
Funcions potencials					
$y = x^m$	$y' = m \cdot x^{m-1}$	$y = x^5$	$y' = 5x^4$	$y = \left(2x^2+1\right)^3$	$y' = 3 \cdot \left(2x^2+1\right)^2 \cdot 4x$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{5x}$	$y' = \frac{5}{2\sqrt{5x}}$
$y = \sqrt[m]{x}$	$y' = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$	$y = \sqrt[5]{x}$	$y' = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$	$y = \sqrt[5]{3x^2}$	$y' = \frac{6x}{5 \cdot \sqrt[5]{\left(3x^2\right)^4}}$
Funcions exponencials					
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{3x^2+1}$	$y' = 6xe^{3x^2+1}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = 3^x$	$y' = 3^x \cdot \ln 3$	$y = 5^{3x-4}$	$y' = 3 \cdot 5^{3x-4} \cdot \ln 5$
Funcions logarítmiques					
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln\left(x^2+7x\right)$	$y' = \frac{2x+7}{x^2+7x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$y = \log_2 (5x+7)$	$y' = \frac{5}{(5x+7) \cdot \ln 5}$
Funcions trigonomètriques					
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin 5x$	$y' = 5 \cdot \cos 5x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos 3x^2$	$y = -6x \cdot \sin 3x^2$
$y = tgx$	$y' = 1 + tg^2 x$ $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = tgx$	$y' = 1 + tg^2 x$ $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = tg 7x$	$y' = (1 + tg^2 (7x)) \cdot 7$ $y' = \frac{7}{\cos^2 (7x)}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x^2$	$y' = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos 3x$	$y' = \frac{-3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$
$y = arctg x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = arctg x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = arctg\ 3x$	$y' = \frac{3}{1+(3x)^2}$

b) Derivada de funcions del tipus $y = u^v$

Per trobar la derivada d'un funció del tipus $y = u^v$, cal prendre logaritme a totes dues bandes de la igualtat:

$$y = u^v$$

$$\ln y = \ln u^v$$

$$\ln y = v \cdot \ln u$$

Derivem

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \rightarrow \quad y' = \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) \cdot y$$

Ex: Trobeu la derivada de $y = \left(3x^2 - 5\right)^{\sin x}$

$$y = \left(3x^2 - 5\right)^{\sin x}$$
$$\ln y = \ln\left(3x^2 - 5\right)^{\sin x}$$
$$\ln y = \sin x \cdot \ln\left(3x^2 - 5\right)$$
$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(3x^2 - 5) + \sin x \cdot \frac{6x}{(3x^2 - 5)}$$
$$y' = \left(\cos x \cdot \ln(3x^2 - 5) + \sin x \cdot \frac{6x}{(3x^2 - 5)} \right) \cdot y$$
$$y' = \left(\cos x \cdot \ln(3x^2 - 5) + \sin x \cdot \frac{6x}{(3x^2 - 5)} \right) \cdot \left(3x^2 - 5\right)^{\sin x}$$

c) Derivada de una funció implícita

Una *funció* s'anomena *implícita* quan està definida de la forma $F(x,y) = 0$ en lloc de la forma habitual ($y = f(x)$)
Per poder derivar una funció implícita només cal fer servir la regla de la cadena, i tenir present que en el cas de la variable independent (x) es deriva directament i pel que fa a la variable dependent (y) s'ha de considerar que és una funció que depèn de la variable independent i per tant cal aplicar la regla de la cadena (cal posar y')

Ex: Troba la derivada de la funció implícita : $y^3 + y^2 + 5xy + x^2 + x + y = 0$

$$3y^2 \cdot y' + 2y \cdot y' + 5y + 5x \cdot y' + 2x + 1 + y' = 0$$

$$y'(3y^2 + 2y + 5x + 2x + 1) = -5y - 1 \quad \rightarrow \quad y' = \frac{-5y - 1}{3y^2 + 2y + 5x + 2x + 1}$$

Estudi de la derivabilitat d'una funció

Si una funció és derivable en un punt, necessàriament és continua:

Derivabilitat → Continuïtat
No continuïtat → no derivabilitat
Continuïtat $\nrightarrow$ Derivabilitat

Si suposem que una funció f és continua en x_0 (ja que si no és continua no és derivable), si:

$$\left.\begin{array}{l}\exists\, f'(x_0^-)\\ \\ \exists\, f'(x_0^+)\end{array}\right\}\; i\; f'(x_0^-) = f'(x_0^+) \Rightarrow \quad \exists\, f'(x_0)$$, la funció és *derivable en x_0*

Ex: Estudieu la derivabilitat de la funció: $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \prec 2 \\ 3x - 2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

a) <u>Continuïtat</u>

- *si $x < 2 \rightarrow f(x) = x^2 \rightarrow$ polinomi → continua i derivable*
- *si $x > 2 \rightarrow f(x) = 3x - 2$ polinomi → continua i derivable*
- *si $x = 2$*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x^2 = 4 \\ \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (3x-2\ ) = 4\end{array}\right\}\ \exists \lim_{x\to 2} f(x) = 4 \rightarrow f \text{ és continua en } x = 2$$

f(x) és continua en |R

b) <u>Derivabilitat</u>

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & si\ x \prec 2 \\ 3 & si\ x \succ 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(2) = 4 \\ f'_+(2) = 3 \end{array}\right\}\ \nexists\, f'(x) \rightarrow f \text{ no és derivable en } x = 2$$

f és continua en |R i derivable en $R - \{2\}$

Ex: Calculeu m i n perquè la funció següent sigui derivable en $x_0 = 1$

$$f(x)\begin{cases} x^2 - 5x + m & si\ x \leq 1 \\ -x^2 + nx & si\ x \succ 1 \end{cases}$$

Si f és derivable en x = 1 → f és continua en x = 1

<u>Continuïtat</u> → $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-}(x^2 - 5x + m = m - 4 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+}(-x^2 + nx\ \ ) = n - 1 \end{aligned}\right\} \quad m - 4 = n - 1$$

<u>Derivabilitat</u> → $f_1^-(1) = f_1^+(1)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & si\ x \leq 1 \\ -2x + n & si\ x \succ 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f_-'(1) &= -3 \\ f_+'(1) &= n - 2 \end{aligned}\right\} \quad -3 = n - 2 \rightarrow n = -1 \longrightarrow$$

m – 4 = -1 – 1 → m = 2