TEMA 8 : GEOMETRIA A L'ESPAI. RECTES I PLANS

<u>Equacions d'una recta</u>

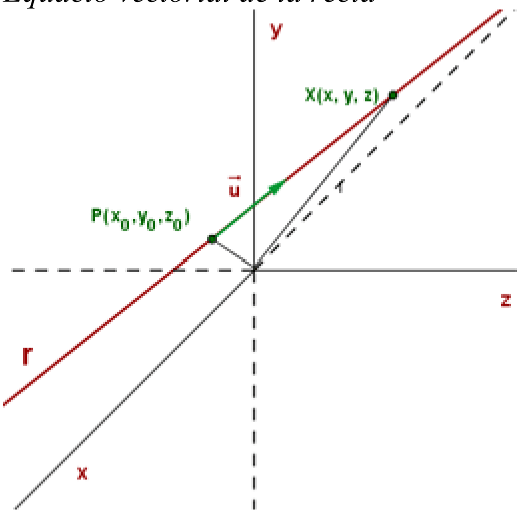
Sigui la recta r que passa per P = (x_0, y_0, z_0) amb vector director $\vec{u}$ = (u_1, u_2, u_3). Qualsevol punt X = (x, y, z) de la recta verifica

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{u}$$

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3)$$

$$\forall \lambda \in \Re$$

Equació vectorial de la recta



$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda \cdot u_1 \\ y &= y_0 + \lambda \cdot u_2 \\ z &= z_0 + \lambda \cdot u_3 \end{aligned}\right\}$$

Equacions paramètriques de la recta

Si deixem sola λ a cada equació

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

Equació contínua de la recta

Si traiem denominadors i es passa tot a un costat de la igualtat

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{aligned}\right\}$$

Equacions implícites de la recta

amb elles la recta s'expressa com una intersecció de plans.

Ex: Equacions de la recta que passa pels punts P = (- 1, - 2, 1) i Q = (1, 3, -2). Pertany el punt (3,8,- 5) a la recta r?

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (2,5,-3)$$

$$(x, y, z) = (-1,-2,1) + \lambda \cdot (2,5,-3)$$

Equació vectorial

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-1}{-3}$$

Equació contínua

$$\left.\begin{aligned} \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{5} &\rightarrow 5x - 2y + 1 = 0 \\ \frac{y+2}{5} = \frac{z-1}{-3} &\rightarrow -3y - 5z - 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

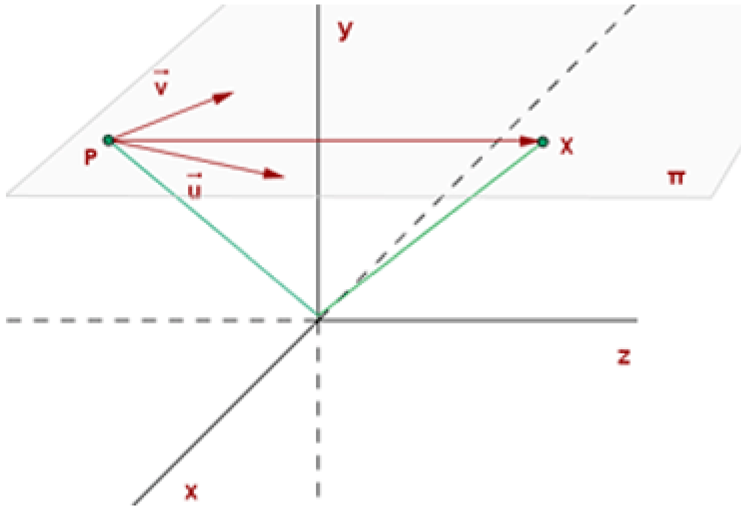
Equacions implícites

$$\frac{3+1}{2} = \frac{8+2}{5} = \frac{-5-1}{-3} \rightarrow 2 = 2 = 2$$

(3,8,-5) pertany a la recta

<u>Equacions del pla</u>

Sigui un punt P = (x_0, y_0, z_0) del pla i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dos vectors linealment independents que determinen el pla. Per qualsevol punt $\chi = (x, y, z)$ del pla π.



$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mu \cdot (v_1, v_2, v_3) \qquad \forall \lambda, \mu \in \Re$$

Equació vectorial

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1 \\ y &= y_0 + \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2 \\ z &= z_0 + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3 \end{aligned}\right\} \quad \textit{Equacions paramètriques}$$

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

$$\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

Equació general o cartesiana

$$Ax + By + Cz + D = 0$$
$$Ax + By + Cz = -D$$

$$\frac{-A}{D} x - \frac{B}{D} y - \frac{C}{D} z = 1$$

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}}+\frac{y}{\frac{-D}{B}}+\frac{z}{\frac{-D}{C}}=1$$

$$\frac{x}{l}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}=1$$ *Equació canònica o segmentària*

on (l, 0, 0), (0, m, 0) i (0, 0, n) són els punts d'intersecció amb els eixos

Ex: Equacions del pla que passa per P = (2, - 2, 1), Q = (1, 0, 5) i R = (- 2, 1, 2)

$$\overrightarrow{PQ}=(-1,2,4)$$
$$\overrightarrow{QR}=(-3,1,-3)$$
són linealment independents

$(x,y,z) = (1, 0, 5) + \lambda \cdot (- 1, 2, 4) + \mu \cdot (- 3, 1, - 3)$ *Equació vectorial*

$$\left.\begin{array}{l} x=1+\lambda\cdot(-1)+\mu\cdot(-3) \\ y=\lambda\cdot 2+\mu\cdot 1 \\ z=5+\lambda\cdot 4+\mu\cdot(-3) \end{array}\right\}$$ *Equacions paramètriques*

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -3 \\ y & 2 & 1 \\ z-5 & 4 & -3 \end{vmatrix}=-10x-15y+5z-15=0$$ *Equació general*

$$\frac{-10}{15}x-y+\frac{5}{15}z=1$$

$$\frac{-2}{3}x-y+\frac{z}{3}=1$$ *Equació canònica*

Punts de tall amb els eixos ($\frac{-3}{2}$, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 3)

Ex: Trobeu l'equació vectorial del pla 3x-y+2z-6=0

$$x = 2 + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z$$

$$(x, y, z) = (2 + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z, y, z)$$

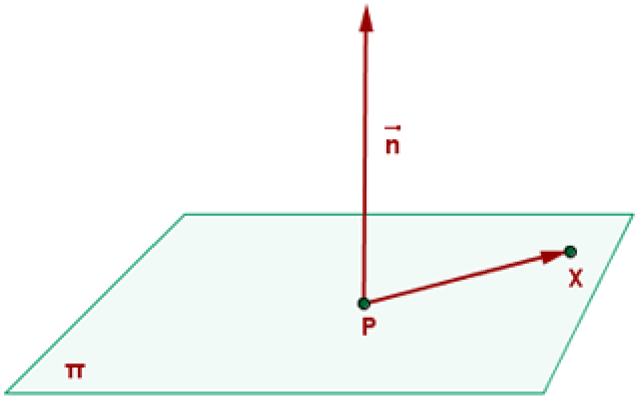
$$(x, y, z) = (2,0,0) + (\frac{1}{3}y, y, 0) + (\frac{-2}{3}z, 0, z)$$

$$(x, y, z) = (2,0,0) + y(\frac{1}{3}, 1, 0) + z(\frac{-2}{3}, 0, 1)$$

$$(x, y, z) = (2,0,0) + \lambda \cdot (\frac{1}{3}, 1, 0) + \mu \cdot (\frac{-2}{3}, 0, 1)$$

<u>Vector associat al pla</u>

El vector $\vec{n} = (A, B, C)$ perpendicular al pla π d'equació Ax+By+Cz+D=0 és el vector normal o associat al pla.



Si P = (x_0, y_0, z_0) és un punt del pla, el vector $\overrightarrow{PX}$ és perpendicular al vector $\vec{n}$ i, en per

aquest motiu, el producte escalar $\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0$. D'aquesta manera podem obtenir l'equació general del plànol.

Ex: Equació del pla que passa per P = (-1,2,-3) i és perpendicular a r: (x,y,z)=(2,0,3)+λ(1,-4,2)

$\vec{n} = (1,-4,2)$

$\overrightarrow{PX} = (x+1, y-2, z+3)$

$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 1\cdot(x+1) - 4\cdot(y-2)+2\cdot(z+3)=0$

$x - 4y + 2z + 15 = 0$

Ex: Equació de la recta que passa per (0, 0, 0) i és perpendicular a π : 2x–3y+z–7=0

$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda \cdot (2, -3, 1)$

Coordenades del punt mig d'un segment

Donats $A = (x_1, y_1, z_1)$ i $B = (x_2, y_2, z_3)$ extrems d'un segment, el punt mig M ve donat per

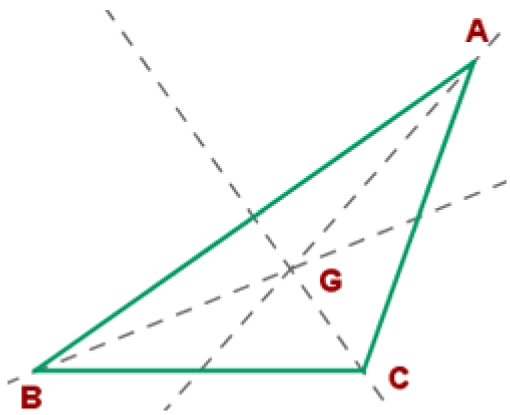
$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

Ex: Donats els punts A = (3, - 2, 5) i B = (3, 1, 7) trobeu el punt mig del segment que determinen

$$M\left(\frac{3+3}{2}, \frac{-2+1}{2}, \frac{5+7}{2}\right) \qquad M\left(3, -\frac{1}{2}, 6\right)$$

Coordenades del baricentre d'un triangle

Siguin $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ i $C = (x_3, y_3, z_3)$ els vèrtexs d'un triangle, les coordenades del baricentre G



$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

Punts alineats

Tres o més punts estan alineats si es troben a la mateixa recta i, en conseqüència, el rang dels vectors que determinen és 1.

Ex: Comproveu que els punts A = (2, 3, 1), B = (5, 4, 3) i C = (2, 1, 2) estan alineats

$$\overrightarrow{AB} = (5-2, 4-3, 3-1) = (3, 1, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2-2, 1-3, 2-1) = (0, -2, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$rang\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 2$$

Els punts no estan alineats

Punts coplanaris
Dos o més vectors són coplanaris si són linealment dependents i el seu rang és 2.
Dos o més punts són coplanaris si els vectors que determinen ho són.

Ex: Comproveu si els punts A = (1, 2, 3), B = (4, 7, 8), C = (3, 5, 5), D = (-1, -2, -3) i E = (2, 2, 2)

Per tal que siguin coplanaris

$$rang\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right) = 2$$

$$\overrightarrow{AB} = (4-1, 7-2, 8-3) = (3, 5, 5)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3-1, 5-2, 5-3) = (2, 3, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (-1-1, -2-2, -3-3) = (-2, -4, -6)$$

$$\overrightarrow{AE} = (2-1, 2-2, 2-3) = (1, 0, -1)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$rang\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right) = 3$$

Els punts no són coplanaris