TEMA 8: Probabilitat

Full de preparació

Aquest full s'ha de lliurà el dia de la prova

Nom: .... Curs: ....

1. Tirem un dau i definim els esdeveniments:
   A = { obtenim nombre senar }
   B = { més gran que 2 }
   C = { més petit o igual que 3 }
   D = { nombre decimal periòdic }
   E = { més gran que 6 }
   F = { més petit que 12 }
   G = { més petit o igual a 4 }
   H = { més petit que 2 }

   a) Quins són els elements de cada esdeveniment?
   b) Trobeu $A \cap B$, $A \cup B$, $H \cap B$, $H \cup B$, $\overline{A}, \overline{C}, A \cap \overline{B}$ i $A - G$.
   c) Com són C i G?
   d) Hi ha algun esdeveniment segur?
   e) I impossible?
   f) Hi ha algun esdeveniment elemental?
   g) Hi ha esdeveniments incompatibles?

2. Tenim tres urnes, cadascuna de les quals té boles blanques i negres. Extraiem una bola de cada urna, i mirem el seu color.
i) Descriure l'espai mostral de l'experiment.
ii) Descriure el succés A = "treure una sola bola blanca"

3. Llancem un dau de vuit cares. Si surt un un, tornem a tirar el dau una sola vegada més, i sumem els resultats.
i) Quin és l'espai mostral d'aquest experiment?
ii) Descriu els successos A = "treure un nombre més petit que 2", B = "treure un cinc o un sis", C = "treure un múltiple de tres"

4. En una reunió tenim 20 persones, algunes de les quals porten ulleres. Determinar per quins resultats està format el succés "ser dona i no portar ulleres, o portar ulleres".

5. Una urna conté tres boles vermelles i dues blaves. Extraiem successivament i amb reposició, dues boles i observem el seu color.
a) Defineix quins resultats possibles compleixen el succés "treure una bola vermella i una blava, sense importar en quin ordre". Comprova que aquest succés coincideix amb la intersecció de "treure una bola vermella" i "treure una bola blava"
b) Defineix quins resultats compleixen el succés "treure una bola vermella la primera vegada, o una blava la segona". Comprova que aquest succés coincideix amb la unió de "treure una bola vermella la primera vegada" o "treure una bola blava la segona vegada".

6. Si en una família hi ha dos fills, i suposem que la probabilitat de ser home és la mateixa que la de ser dona, quina és la probabilitat que els dos fills siguin del mateix sexe?

7. Calcular la probabilitat que en tirar dues monedes a l'aire surtin dues cares.

8. Suposem que la probabilitat de néixer home és la mateixa que la probabilitat de néixer dona. Quina és la probabilitat que, si tenim tres fills, dos d'ells siguin dones?

9. Suposem que llencem un dau. Volem calcular la probabilitat de A = "treure un nombre parell", B = "treure un nombre menor o igual que 5", C = "treure un tres o cinc", $D=A\cap B$, $E=A\cup B$.

10. Un dau de sis cares està trucat, de manera que la probabilitat que surti cada cara és proporcional al nombre d'aquesta.

a) Quina és la probabilitat de treure un 6?
b) Quina és la probabilitat de treure un nombre senar?

11. Demà hi ha examen. Esther ha estudiat molt, i només té probabilitat 1 / 5 de suspendre. David ha estudiat menys, i té probabilitat 1 / 3 de suspendre. Sabem que la probabilitat que suspenguin els dos és de 1 / 8. Quina és la probabilitat que suspengui com a mínim un dels dos?

12. Fent una enquesta telefònica, hem preguntat a 1000 persones si creien necessari que hi hagués més il·luminació al carrer a la nit. Ens han contestat 480 homes, dels quals 324 han contestat que sí, i 156 que no, i 520 dones, de les quals 351 han contestat que sí, i 169 que no. Ens preguntem si homes i dones tenen una opinió diferent, o bé si és irrellevant per a la qüestió.

13. En una classe de 35 alumnes hi ha 4 nois esquerrans, 20 noies, i un total de 26 dextros. Quina és la probabilitat de ser noia, i dextra? Nota: suposem, per simplificar, que només es pot ser o dextro, o esquerrà.

14.

a) Tirem tres vegades una moneda a l'aire. Volem saber la probabilitat del succés A = "treure dues cares".

b) Suposem ara que la moneda està descompensada, i $P(C) = \frac{6}{10}$, $P(+) = \frac{4}{10}$. Quin és P (A) ara?

15. Una fàbrica de cargols té dues màquines, la M1, que és més antiga, i fa el 75% de tots els cargols, i la M2, més nova però petita, que fa el 25% dels cargols. La M1 fa un 4% de cargols defectuosos, mentre que la M2 tan sols fa un 2% de cargols defectuosos. Si escollim un cargol a l'atzar, quina probabilitat hi ha que surti defectuós?

16. Tenim tres caixes amb bombetes. La primera conté 10 bombetes, de les quals hi ha quatre foses, en la segona hi ha sis bombetes, i tan sols una fosa, i en la tercera hi ha tres bombetes foses d'un total de vuit. Quina és la probabilitat que si escollim una caixa a l'atzar, i agafem una bombeta, aquesta estigui fosa?

17. Una bossa conté tres boles vermelles i dues boles blaves. Fem dos experiments:
i) extraiem successivament, i amb reposició, dues boles i observem el seu color. Quina és la probabilitat de S = "extreure una bola vermella i una blava, sense que importi l'ordre"?
ii) extraiem successivament, però sense reposició, dues boles i observem el seu color. Quina és la P(S) en aquest cas?

18. En un congrés es reuneixen 250 metges d'Europa, dels quals 115 són alemanys, 65, francesos, i 70 anglesos. D'aquests metges, el 75% dels alemanys, el 60% dels francesos i el 65% dels anglesos estan a favor d'utilitzar una nova vacuna per la grip. Per escollir

finalment si s'aplica la vacuna, es fa el següent: entre la llista de metges, es selecciona a l'atzar tres vegades un metge, que respon si està a favor o no. Es pot donar el cas que es seleccioni més d'una vegada al mateix metge, és a dir, a votar, no se li titlla de la llista. Com es decideix per majoria, quina és la probabilitat que com a mínim dos vots siguin a favor d'utilitzar la vacuna?

19. Una fàbrica de cargols té dues màquines, la M1, que és més antiga, i fa el 75% de tots els cargols, i la M2, més nova però petita, que fa el 25% dels cargols. La M1 fa un 4% de cargols defectuosos, mentre que la M2 tan sols fa un 2% de cargols defectuosos. Si escollim un cargol a l'atzar, quina probabilitat hi ha de que surti defectuós?
Com hem vist, podíem resoldre el problema utilitzant el teorema de la probabilitat total, que no era res més que utilitzar un diagrama en arbre per a resoldre'l.

20. Tenim tres caixes amb bombetes. La primera conté 10 bombetes, de les quals hi ha quatre foses, en la segona hi ha sis bombetes, i tan sols una fosa, i en la tercera hi ha tres bombetes foses d'un total de vuit. Si agafem una bombeta fosa, quina és la probabilitat que sigui de la caixa 1?

21. En un congrés es reuneixen 250 metges d'Europa, dels quals 115 són alemanys, 65, francesos, i 70 anglesos. D'aquests metges, el 75% dels alemanys, el 60% dels francesos i el 65% dels anglesos estan a favor d'utilitzar una nova vacuna per la grip. Si escollim un metge a l'atzar, i està a favor d'aplicar la vacuna, quina és la probabilitat que sigui francès?

Solucions:

2.

i) Considerarem que B = "bola blanca", N = "bola negra". Com traiem una bola de cada urna, cada succés elemental del nostre experiment consisteix en tres boles, que poden ser blanques o negres. És a dir, $\Omega = \{BBB, BBN, BNB, BNN, NBB, NBN, NNB, NNN\}$, On "BBN" vol dir: "treure una bola blanca a la primera urna, blanca en la segona, i negra a la tercera". Segons el que ens interessi calcular, no seria incorrecte considerar que els nostres successos elementals estan desordenats, i només ens importa el nombre total de boles blanques i negres que hem tret. En aquest cas, el nostre espai mostral seria $\Omega' = \{BBB, BBN, BNN, NNN\}$, on ara "BBN" només vol dir: "treure dues boles blanques i una negra", però normalment no seguirem aquesta forma de calcular-ho, ja que pot portar a problemes a l'hora de comptar probabilitats, més endavant.

ii) Podem treure una bola blanca en qualsevol de les tres urnes. Per tant, tots els esdeveniments que ens interessen són: BNN, NBN, NNB. És a dir, A = (BNN, NBN, NNB)

3.

i) Quan llancem un dau de vuit cares, els resultats que ens poden sortir són (1,2,3,4,5,6,7,8). Ara bé, en el nostre experiment, quan ens surt un un, tornem a tirar el dau, i de nou podem obtenir un nombre entre 1 i 8. El resultat més petit que podem obtenir és un 2 (si traiem un 1 la primera vegada, i un altre 1 la segona), i el resultat més gran és 9 (si traiem un 1 la primera vegada, i un vuit la segona). Per tant, el nostre espai mostral és $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Fixem-nos que "1" no és un succés elemental del nostre experiment, ja que mai podrem obtenir un total d'un, sumant les dues tirades.

ii) No podem obtenir un resultat estrictament menor que 2, per la qual cosa A = $\varnothing$. És a dir, A és un succés impossible.
Els esdeveniments que compleixen B són el 5 i el 6, ja que si surt qualsevol dels dos, es compleix el succés. Per tant, B = (5,6)
Per calcular C, hem de mirar quins són els múltiples de tres del nostre espai mostral. En el nostre cas, tenim 3,6,9. Per tant, C = (3,6,9)

4.

Necessitem definir, en primer lloc, quins són els nostres resultats possibles.
Per exemple, podem suposar que són, d'una banda, H = "ser home" i M = "ser dona" i de l'altra, G = "portar ulleres" o NG = "no portar ulleres".
En aquest cas, el nostre espai mostral està format per $\Omega = \{ (H,U), (H, NU), (D,U), (D,NU) \}$
.
Amb aquesta notació, el succés "ser dona i no portar ulleres" = {(D, NU)}. El succés "portar ulleres" = ((H, U), (D, U)), és a dir, està format pels homes que porten ulleres i les dones que porten ulleres. Llavors, el succés unió de "ser dona i no portar ulleres" o "portar ulleres" està format per $\{ (H,G), (M,G), (M,NG) \}$, És a dir, els únics que no compleixen el succés són els homes que no porten ulleres.

Observem que, de fet, $\bar{H} = D$, i $\bar{U} = NU$, això vol dir, si no és home és perquè és dona, i el contrari de portar ulleres és no portar ulleres.
Per aquest motiu, també podríem haver descrit nostre espai mostral com
$\Omega = \{ (H,U), (H, \bar{U}), (\bar{H},U), (\bar{H},\bar{U}) \}$, per exemple.

5.

Aquest és un tipus d'experiment freqüent, que veurem també en combinatòria. Si extraiem dues boles d'una urna "successivament i amb reposició" vol dir que primer traiem una, observem el seu color, la tornem a introduir en l'urna, i traiem la segona. Si les estrangeres sense reposició, voldria dir que quan traiem la primera bola, no la tornem a introduir a l'urna.

a) Primer, analitzem què passa quan no ens importa l'ordre. Cada vegada que traiem una bola, pot passar que sigui una bola vermella (V), o bé que sigui una bola blava (B). Aleshores, podem considerar que el nostre espai mostral és $\Omega = \{ \{V,V\} , \{V,B\}, \{B,B\} \}$. En aquest cas, el resultat possible que compleix l'enunciat és el {V, B}.

Vegem ara que el succés "treure una bola vermella i una blava" coincideix amb la intersecció dels successos "treure una bola vermella" (en qualsevol de les dues extraccions) i "treure una bola blava" (també en qualsevol de les dues extraccions). Els resultats que compleixen el succés "treure una bola vermella" són {(V, V), (V, B)}. Els resultats que compleixen el succés "treure una bola blava" són {(V, B), (B, B)}. El succés intersecció està format pels que compleixen els dos successos al mateix temps, és a dir, únicament (V, B).

No és l'única manera de resoldre aquest apartat. També podem considerar que els resultats estan ordenats, i llavors veure quins compleixen l'enunciat. Si considerem els resultats amb ordre, llavors el nostre espai mostral és $\Omega = \{ (V,V), (V,B), (B,V), (B,B) \}$, que per abreujar, solem escriure com $\Omega = \{VV, VB, BV, BB\}$. Llavors, els resultats possibles que compleixen l'enunciat són VB i BV.

En aquest cas, el succés "treure una bola vermella" = {VV, VB, BV}. El succés "treure una bola blava" = {B, BV, BB}. El succés intersecció està format pels successos que compleixen tots dos. En aquest cas, els successos en comú són {B, BV}, tal com havíem vist abans.

b) Ara considerem què passa quan sí que ens importa l'ordre. En aquest cas, necessitem saber en quin ordre hem extret les boles, de manera que hem d'escriure l'espai mostral com $\Omega = \{ VV, VB, BV, BB \}$. Els resultats que compleixen "treure una bola vermella la primera vegada, o una blava la segona" són: { VV,VB, BB }.

Vegem ara què és el succés "treure una bola vermella la primera vegada" = {VV, VB}. D'altra banda, "treure una bola blava la segona vegada" = {B, BB}. Per tant, el succés unió dels dos és el conjunt format pels que compleixen un o l'altre, és a dir, "treure una bola vermella la primera vegada, o una blava la segona" = { VV,VB,BB }, tal com havíem vist abans.

6.

Com anem a aplicar la regla de Laplace, considerarem els resultats ordenats.
En aquest cas, el nostre espai mostral és: $\Omega = \{HH, HD, DH, DD\}$. Els casos favorables són: HH i DD. Per tant, la probabilitat és de $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, És a dir de 0'5 (el 50%).

7.

Cada vegada que tirem una moneda, és igual de probable que surti cara o creu, de manera que tots els resultats possibles són equiprobables.
El nostre espai mostral té 4 elements, $\Omega = \{ cc, c+, +c, ++ \}$, I només hi ha un cas favorable al succés A = "treure dues cares" = (cc).
Per tant, $P(A) = \frac{1}{4}$, És a dir, una probabilitat de 0'25, el 25%.

8.

Els nostres successos elementals seran: "home" (H) i "dona" (D). El nostre espai mostral és llavors $\Omega = \{HHH, HHD, HDH, HDD, DHH, DHD, DDH, DDD\}$, Si considerem els fills ordenats.
Llavors, els casos favorables al nostre succés A = "dues dones" són: HDD, DHD, DDH, DDD.
Per tant, $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, És a dir, tenim una probabilitat de 0'5, el 50%.

També és correcte pensar que la probabilitat de cada succés és $\frac{1}{8}$, ja que són tots equiprobables (i la suma de totes les probabilitats ha de ser 1), i per tant, si tenim quatre successos elementals favorables, $P(A) = P(HDD) + P(DHD) + P(DDH) + P(DDD) = 4 * \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

9.

Ja sabem que $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Casos favorables a A: 2,4,6. Casos favorables a B: 1,2,3,4,5. Casos favorables a C: 3,5.
Per tant, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{5}{6}$, $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Ara calculem què és D = "treure un nombre parell i menor o igual que 5". Els casos favorables són: 2, 4. Per tant, $P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
Per la seva banda E = "treure un nombre parell o menor o igual que 5" = (1,2,3,4,5). Per tant, $P(E) = \frac{5}{6}$ Observem que es compleix $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ i } B)$. Més endavant veurem que aquesta és una propietat general de la probabilitat. En el nostre cas, com $A \text{ o } B = E$, $A \text{ i } B = D$, tenim que $P(E) = P(A) + P(B) - P(D)$, és a dir, $\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3}$.

10.

Al nostre experiment anterior de tirar un dau, considerem els successos A = "treure un 6", B = "treure un nombre parell". Abans hem raonat que era lògic que si sabíem que havia sortit parell, llavors la probabilitat que hi hagués sortit un sis era superior a la que seria si no disposéssim d'aquesta informació. Comprovem-ho:
Sabem que P (B) = 1 / 2, per la regla de Laplace, i $P(A \cap B) =$ P({treure un 6 i un nombre

parell})=P({treure un 6}) = $\frac{1}{6}$

$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$ En particular, hem comprovat que els nostres successos A i B són dependents, ja que P (A / B) és diferent de P (A).

11.

12.

Per veure més clarament el que ens diuen, el millor és posar les dades en una taula:

	Sí	No
Homes	324	156
Dones	351	169

Considerem els successos A = "voler més llum (haver contestat sí)", B = "que hi hagi contestat un home".

Ens preguntem si A i B són independents, és a dir, si el fet de voler més llum depèn de si s'és home o dona.

Calculem les probabilitats:

$P(A)=\frac{324+351}{1000}=\frac{675}{1000}$,per la regla de Laplace (són tots els que han contestat que sí, sumant homes i dones).

$P(B)=\frac{480}{1000}$, els homes que ens han contestat entre el total de trucades.

$P(A\cap B)=\frac{324}{1000}$, els que són homes i han contestat que sí.

Es compleix que $\frac{324}{1000}=\frac{675}{1000}\cdot\frac{480}{1000}$, és a dir, que $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, de manera que els successos són independents. En altres paraules, el fet de ser home o dona no ha influït per saber si volen o no més llum.

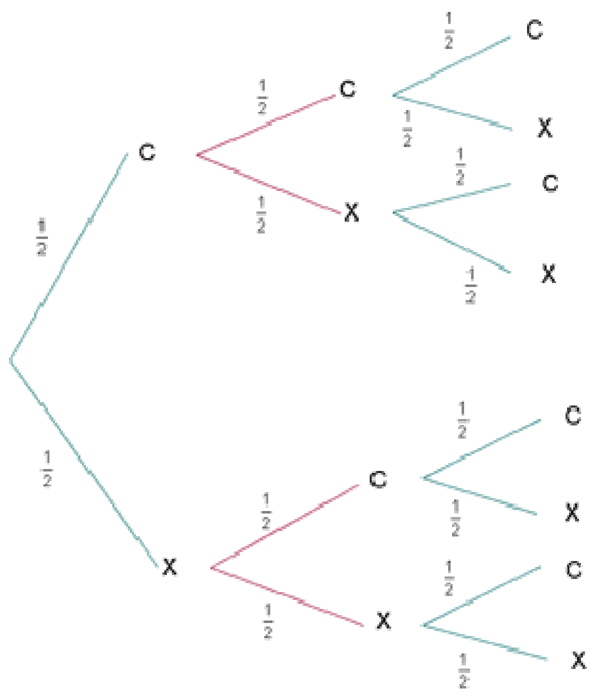
13.

14.

a) Per resoldre el primer problema, podem aplicar la regla de Laplace, ja que la probabilitat que surti cara i surti creu és la mateixa en cada llançament de la moneda, 1/2.

El nostre espai mostral és $\Omega = \{CCC,\ CC+,\ C+C,\ C++,\ +CC,\ +C+,\ ++C,\ +++\}$.

Casos favorables a A: CCC, CC +, C + C, + CC. Per tant, $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
Representem els nostres resultats en un arbre. Partint de l'esquerra, en cada tirada dividim l'arbre segons si ha sortit cara (C) o creu (+), posant sobre de cada branca la probabilitat que succeeixi. En aquest cas, surt un arbre bastant senzill.



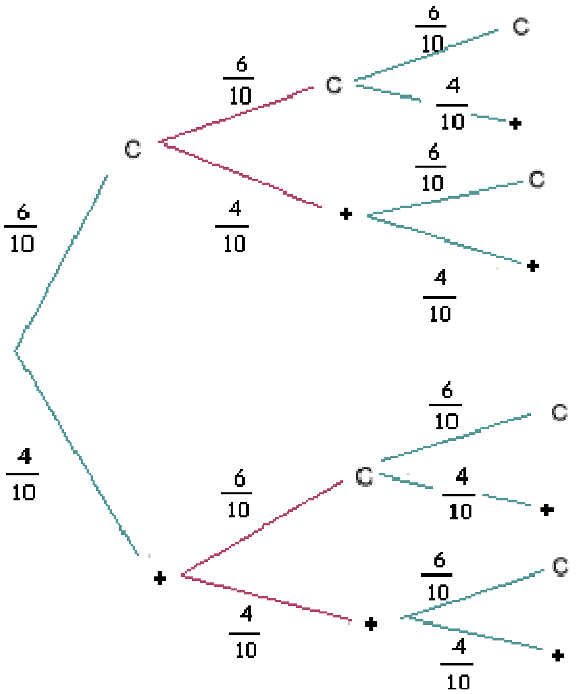
Cada branca de l'arbre, des del principi fins al final, és un resultat de l'espai mostral: "primer surt C, després +, i després C" correspon al succés elemental "C + C".

Per explicar la probabilitat de cada branca, hem de multiplicar les probabilitats de totes les branques que hem seguit per arribar fins al final de l'arbre (ja que és la probabilitat de la intersecció de tres esdeveniments independents). Per exemple, la probabilitat de C + C és $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
Per resoldre el problema, hem de sumar les probabilitats de tots els casos favorables. En el nostre cas, cada branca, és a dir, cada succés elemental, té probabilitat $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, I hi ha quatre branques favorables: CCC, CC +, C + C, + CC. Per tant, de nou trobem que

P (A) = P (CCC) + P (CC +) + P (C + C) + P (+ CC) = $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, Una probabilitat del 50%, el mateix resultat que havíem trobat abans. En aquest cas, el diagrama d'arbre no ens ha dit res que no sabéssim ja amb el teorema de Laplace, però vegem què passa en l'apartat següent.

b) Ara la moneda està descompensada, pel que no podem aplicar directament la regla de Laplace. En aquest cas veurem que utilitzar un diagrama d'arbre és especialment útil.

Vegem dibuixat el nostre experiment en aquest cas:



Els casos favorables a A, són, com abans, CCC, CC+, C+C, +CC.

$$P(CCC)=P(C).P(C).P(C)=\frac{6}{10}\frac{6}{10}\frac{6}{10}=\frac{216}{1000}$$

$$P(CC+)=P(C).P(C).P(+)=\frac{6}{10}\frac{6}{10}\frac{4}{10}=\frac{144}{1000}$$

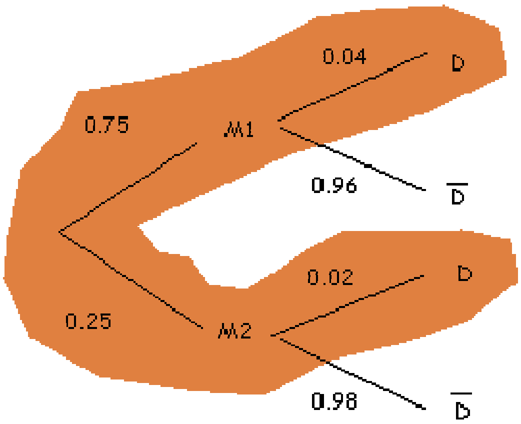
$$P(C+C)=P(C).P(+).P(C)=\frac{6}{10}\frac{4}{10}\frac{6}{10}=\frac{144}{1000}$$

$$P(+CC)=P(+).P(C).P(C)=\frac{4}{10}\frac{6}{10}\frac{6}{10}=\frac{144}{1000}$$

Finalment, P (A) = P (CCC) + P (CC +) + P (C + C) + P (+ CC) = $\frac{216}{1000}+\frac{144}{1000}+\frac{144}{1000}+\frac{144}{1000}=\frac{648}{1000}=0'648$, és a dir, A té una “probabilitat” del 64'8%

15.

Considerem els següents esdeveniments: M1 = "ser produït per la màquina 1" (i $\overline{M1} = M2 =$ "ser produït per la màquina 2"), D = "cargol defectuós".
Si representem el nostre problema en un diagrama d'arbre, podem calcular la probabilitat més fàcilment.
En el diagrama estan marcades les dues branques que ens interessen.



La branca superior, "ser produït per la màquina 1 i ser defectuós", té probabilitat 0,75 * 0,04 = 0,03, és a dir, un 3%.
La branca inferior, "ser produït per la màquina 2 i ser defectuós", té probabilitat 0,25 * 0,02 = 0,005, és a dir, un 0,5%.

Per tant, la probabilitat de ser defectuós és:

P(D) = 0,75 . 0,04 + 0,25 . 0,02 = 0.035

Observem el que hem fet. Les probabilitats amb les quals hem treballat són de fet probabilitats condicionades: P(D/M1) és, precisament, la probabilitat que surti defectuós si sabem que l'ha produït la màquina 1.

Així doncs, podem reescriure el nostre resultat com:

P(D) = P(M1) . P(D/M1) + P(M2) . P(D/M2)

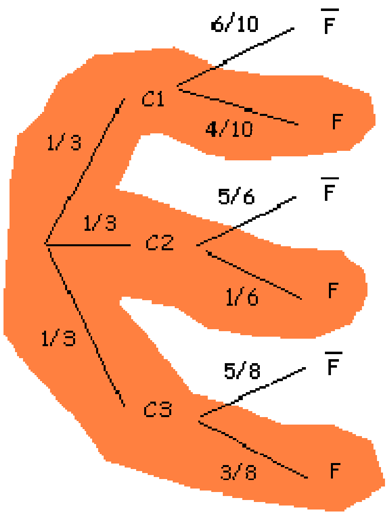
16.

Escriurem C1, C2, C3 si triem les caixes 1, 2, i 3, respectivament.

Com que la elecció és l'atzar, tenim probabilitat $\frac{1}{3}$ de triar cada caixa.

El succés que ens interessa és F = "bombeta fosa", de manera que $\bar{F}$ = "Bombeta no fosa".

El representem en un diagrama en arbre.



Estan marcades en taronja les tres branques que ens interessen, les que acaben en "bombeta fosa".
(C1, C2, C3) és un sistema complet de successos, ja que sempre escollirem una de les tres caixes (és a dir, la seva unió és el total), i no podem escollir més d'una (és a dir, són incompatibles 2-2).
Apliquem, doncs, el teorema de la probabilitat total:

P(F) = P(C1) . P(F/C1) + P(C2) . P(F/C2) + P(C3) . P(F/C3) =

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{4}{30}+\frac{1}{18}+\frac{3}{24}=\frac{113}{360}.$$

Com veiem, aplicar el teorema de la probabilitat total no és altra cosa que calcular la probabilitat mitjançant un diagrama d'arbre.
L'únic amb el que hem d'anar amb compte és a l'hora de calcular les probabilitats de cada branca.

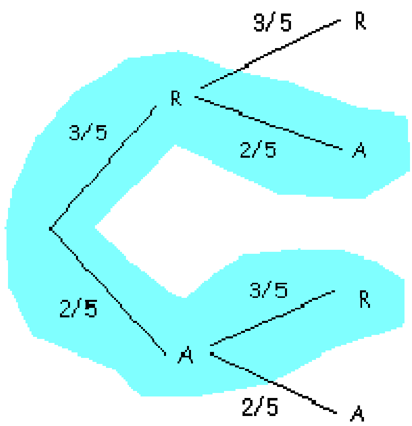
17.

Aquest és un experiment molt freqüent: quan extraiem alguna cosa amb reposició, vol dir que quan traiem la bola, la tornem a introduir en la borsa. Si és sense reposició, ens hem de quedar la bola que hem tret, per tant tan influirà en la probabilitat que la segona sigui d'un color o d'un altre.

Considerem els successos: R = "treure una bola vermella", A = $\overline{R}$ = "Treure una bola blava".

El nostre espai mostral és: $\Omega = \{RR, RA, AR, AA\}$, i els esdeveniments que ens interessen són RA i AR.

i) Representem el nostre problema en un diagrama en arbre.

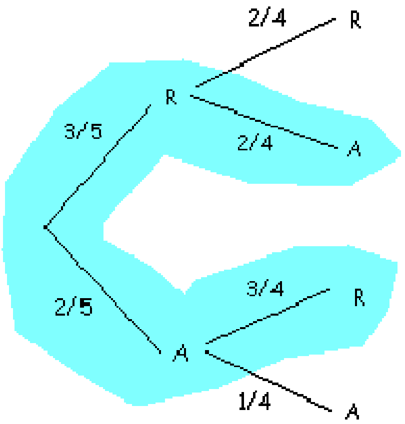


Pel teorema de la probabilitat total, P (S) = P (R). P (A / R) + P (A). P (R / A) = $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$.

ii) En aquest cas, la segona vegada que traiem una bola, les probabilitats seran diferents, segons si hem agafat una bola vermella o una blava la primera vegada.

Per exemple P (A / R) = "probabilitat de treure una bola blava la segona vegada, sabent que a la primera hem tret una vermella" = $\frac{2}{4}$, Ja que com hem tret una bola vermella de la borsa, queden dues boles blaves d'un total de quatre boles.

En aquest cas, el nostre diagrama en arbre és el següent (calcula les probabilitats condicionades, i comprova que et dóna el mateix).



Així doncs, pel teorema de la probabilitat total, tenim un resultat diferent al de l'apartat anterior:

P (S) = P (R). P (A / R) + P (A). P (R / A) = $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{12}{20}$.

18.

Considerem els següents esdeveniments: A = "metge alemany", F = "metge francès", I = "metge anglès", així com V = "estar a favor de la vacuna" (i per tant, $\bar{V}$ = "Estar en contra de la vacuna").

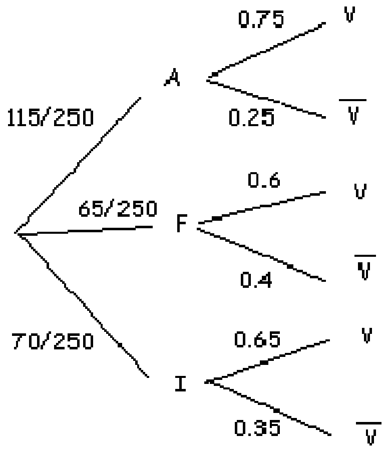
Es tracta d'una elecció composta: escollim tres metges, cadascun dels quals pot estar a favor o en contra d'utilitzar la vacuna.

El nostre espai mostral total seria:

$\Omega = \{ (V,V,V),\ (V,V,\bar{V}),\ (V,\bar{V},V),\ (V,\bar{V},\bar{V}),\ (\bar{V},V,V),\ (\bar{V},V,\bar{V}),\ (\bar{V},\bar{V},V),\ (\bar{V},\bar{V},\bar{V}) \}$. Els casos favorables són quatre: $(V,V,V),\ (V,V,\bar{V}),\ (V,\bar{V},V),\ (\bar{V},V,V)$.

Ara bé, per escollir cada metge en realitat fem un altre experiment compost: escollim aleatòriament un país entre A, F, I, i un cop escollit el metge, aquest pot estar a favor (V), o en contra ($\bar{V}$) D'aplicar la vacuna.

Representem el nostre problema en un diagrama en arbre. Hem de tenir clar que aquest experiment ho repetim tres vegades, una per a cada vot. Es tracta d'una votació "amb reposició", ja que el mateix metge pot votar més d'una vegada. D'aquesta manera, la situació és la mateixa per a les tres votacions.



El nostre espai mostral de cada experiment és $\Omega_i = \{(A,V), (A,\bar{V}), (F,V), (F,\bar{V}), (I,V), (I,\bar{V})\}$
Quina és la probabilitat que un metge escollit a l'atzar estigui a favor de la vacuna?

Pel teorema de la probabilitat total, P (V) = P (A). P (V / A) + P (F). P (V / F) + P (I). P (I / F). Vist d'una altra manera, sumem la probabilitat de totes les branques que acaben en "V".
Substituint,

$$P(V) = \frac{115}{250} \cdot 0{,}75 + \frac{65}{250} \cdot 0{,}6 + \frac{70}{250} \cdot 0{,}65 = 0{,}345 + 0{,}156 + 0.182 = 0{,}683$$

, És a dir, una probabilitat del 68,3%
Com sabem que $P(\bar{V}) = 1 - P(V)$, També hem de $P(\bar{V}) = 1 - 0{,}683 = 0.317$, O el que és el mateix, una probabilitat del 31,7%

Repetim aquesta elecció tres vegades. Tenim quatre casos favorables:
(V,V,V), $(V,V,\bar{V})$, $(V,\bar{V},V)$, $(\bar{V},V,V)$

* Cas (V,V,V): La seva probabilitat és 0,683. 0,683. 0,683 = 0,319
* Cas $(V,V,\bar{V})$: La seva probabilitat és 0,683. 0,683. 0,317 = 0,148
* Cas $(V,\bar{V},V)$: La seva probabilitat és 0,683. 0,317. 0,683 = 0,148
* Cas $(\bar{V},V,V)$: La seva probabilitat és 0,317. 0,683. 0,683 = 0,148

Finalment, la probabilitat de tenir com a mínim dos vots a favor és: 0,319 + 0,148 + 0,148 + 0,148 = 0,763, és a dir, del 76,3%.

Observació 1: En aquest cas no ens importa l'ordre en que escollim els metges, només si estan a favor o no de la vacuna: per això, podríem considerar que el nostre espai mostral és $\Omega' = \{ \{V,V,V\}, \{V,V,\bar{V}\}, \{V,\bar{V},\bar{V}\}, \{\bar{V},\bar{V},\bar{V}\} \}$, sense tenir en compte l'ordre en què han sortit escollits els metges, sinó tan sols si estan a favor o en contra. En comptes d'escriure els successos elementals amb parèntesis "()", els escrivim en aquest cas amb claus "()", és la forma de dir que els nostres resultats estan desordenats. Tractarem això amb més profunditat en el tema de combinatòria.

Els casos favorables són dos, en aquest cas: $\{V,V,V\}$ y $\{V,V,\bar{V}\}$, Tot i que hem de tenir clar que el segon compte per tres, ja que es correspon en realitat amb tres esdeveniments ordenats. D'aquesta manera, calcularíem de la mateixa manera la probabilitat de cada cas, i obtindríem la probabilitat total fent P ("com a mínim dos vots a favor") = $P(\{V,V,V\}) + 3 \cdot P(\{V,V,\bar{V}\})$, De manera que la probabilitat acaba sortint la mateixa tant si els considerem ordenats com desordenats.

Observació 2: Pot semblar estrany que en el nostre problema deixem que un metge pugui votar més d'una vegada, seria més realista que un metge només pogués votar com a màxim una vegada. El que passa en realitat és que la probabilitat que això passi és tan petita, que normalment estudiaríem el problema d'aquesta manera, ja que probablement fem correctament major arrodonint els decimals dels resultats parcials que complicant el problema perquè un metge només pugui votar una vegada. No obstant, és interessant intentar resoldre'l suposant que un metge només pot votar una vegada (llavors hauríem de calcular una probabilitat condicionada diferent per a cada elecció del metge), i comparar-lo amb el resultat que hem trobat.

19.

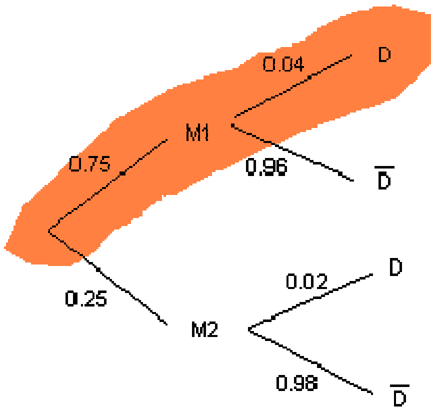
Si sabem que un cargol és defectuós, quina probabilitat hi ha que hagi estat fabricat per la màquina M1?

És a dir, ens estem preguntant per la probabilitat condicionada P (M1/ D).

D'una banda, per la definició de probabilitat condicionada, tenim que:

$$P(M1/D) = \frac{P(M1 \cap D)}{P(D)}$$

D'altra banda, si representem el nostre problema en un diagrama en arbre, veiem que podem calcular $P(M1 \cap D)$, Ja que és la probabilitat de la branca marcada: ser fabricat per M1 i també ser defectuós.



Si tenim en compte, a més, el teorema de la probabilitat total:

P(D) = P(M1) . P(D/M1) + P(M2) . P(D/M2)

arribem finalment a que:

$$P(M1/D)=\frac{P(M1).P(D/M1)}{P(M1).P(D/M1)\ +\ P(M2).P(D/M2)}$$

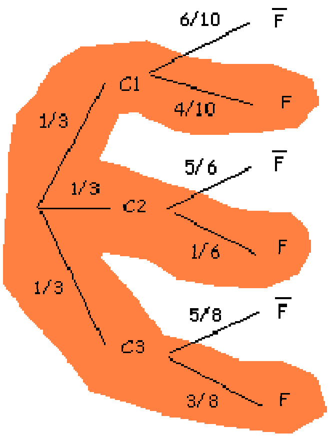
Es a dir, apliquem el Teorema de Bayes:

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i).P(B/A_i)}{P(A_1).P(B/A_1)\ +\ \dots\ +\ P(M_n).P(D/M_n)}$$

$$P(M1/D)=\frac{0{,}75\ .\ 0{,}04}{0{,}75\ .\ 0{,}04\ +\ 0{,}25\ .\ 0{,}02}=0{,}857$$

20.

Recordem que C1, C2, C3 representen les caixes 1, 2 i 3. També F = "bombeta fosa", de manera que $\overline{F}$ = "bombeta no fosa".
Ara només ens interessa la branca superior del nostre diagrama en arbre del nivell anterior.



Ens interessa P (C1 / F). Pel teorema de Bayes,

$$P(C1/F)=\frac{P(C1).P(F/C1)}{P(C1).P(F/C1)+P(C2).P(F/C2)+P(C3).P(F/C3)}$$

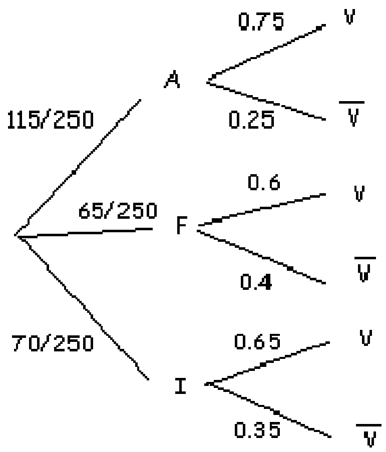
En el nostre cas,

$$P(C1/F)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}}=\frac{\frac{4}{30}}{\frac{113}{360}}=\frac{48}{113}=0{,}425$$

, és a dir, un 42,5%.

21.

Considerem els següents esdeveniments: A = "metge alemany", F = "metge francès", I = "metge anglès", així com V = "estar a favor de la vacuna" (i per tant, $\bar{V}$ = "Estar en contra de la vacuna").
Representem el nostre problema en un diagrama en arbre.



Ens estem preguntant per P (F / V). Pel teorema de Bayes,

$$P(F/V)=\frac{P(F).P(V/F)}{P(A).P(V/A)+P(F).P(V/F)+P(I).P(V/I)}$$

En el nostre cas,

$$P(F/V)=\frac{\frac{65}{250}\cdot 0{,}6}{\frac{115}{250}\cdot 0{,}75+\frac{65}{250}\cdot 0{,}6+\frac{70}{250}\cdot 0{,}65}=0{,}228$$