TEMA 8. PROBABILITAT

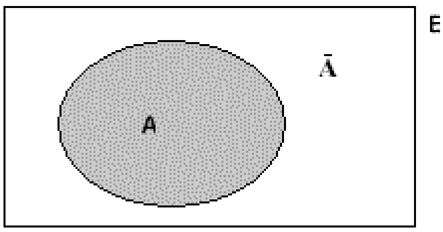
Experiments deterministes i aleatoris.

Un experiment és determinista quan sabem el que succeirà abans de fer-los. Ex: quan deixem una bola de plom sobre la superfície de l'aigua i observem si s'enfonsa, ja sabem que ho farà.

Un experiment aleatori E és aquell del qual es coneixen tots els resultats possibles, si be no es pot predir quin d'ells s'obtindrà, i que el podem repetir en les mateixes condicions totes les vegades que vulguem. Ex: en llançar un dau a l'aire, sabem tots els resultats que podem obtenir però no estem segurs de quin sortirà.
Qualsevol problema de probabilitat està associat a un experiment aleatori.

Conceptes de probabilitat:

- **Esdeveniment elemental.** És cadascun dels possibles resultats d'un experiment aleatori E;
- **Espai mostral Ω**, és el conjunt de tots els esdeveniments elementals associats a un experiment aleatori;
- **Esdeveniment compost**, és la unió d'esdeveniments elementals;
- **Esdeveniment impossible** o **Ø**, és un esdeveniment que no es produeix mai;
- **Esdeveniment segur**, és el que es produeix sempre i coincideix amb l'espai mostral;
- **Espai d'esdeveniments S**, és el conjunt de tots els esdeveniments elementals i compostos associat a un experiment aleatori;
- **Esdeveniment contrari o complementari a A** o $\overline{A}$ és el format per tots els elements de Ω que no pertanyen a A.



Ex:

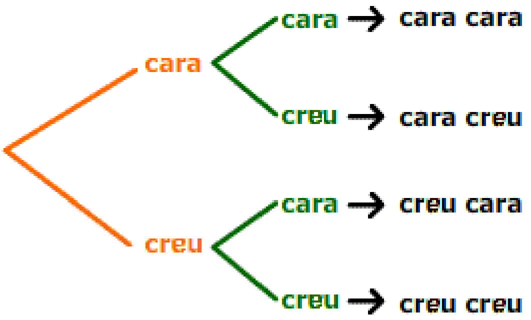
Experiment aleatori: *Extreure una bola d'una bossa que conté quatre boles numerades de l'1 al 4*

Esdeveniments elementals: *Hi ha quatre,*
A_1 *= {1} o { que surti la bola amb l'1 }*
A_2 *= {2} o { que surti la bola amb el 2 }*
A_3 *= {3} o { que surti la bola amb el 3 }*
A_4 *= {4} o { que surti la bola amb el 4 }*

Espai mostral:	*Ω = { 1, 2, 3, 4 }*
Esdeveniment compost:	*{1,2} o { que surti 1 o 2 }* *{1,3} o { que surti 1 o 3 }* *{1,4} o { que surti 1 o 4 }* *{2,3} o { que surti 2 o 3 }* *{2,4} o { que surti 2 o 4 }* *{3,4} o { que surti 3 o 4 }* *{1,2,3} o { que surti 1 o 2 o 3 }* *{1,2,4} o { que surti 1 o 2 o 4 }* *{2,3,4} o { que surti 2 o 3 o 4 }* *{1,2,3,4} o { que surti 1 o 2 o 3 o 4 } o Ω*
Esdeveniment impossible:	*Ø = {que no surti ni 1, ni 2, ni 3 ni 4}*
Esdeveniment segur:	*{que surti 1, 2, 3 o 4} o Ω*
Espai d'esdeveniments:	$S = \{\varnothing, A_1, A_2, A_3, A_4, \{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}, \{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\Omega\}$
Esdeveniments contraris:	$\overline{A_1}$ = *{que no surti 1} o { que surti 1, 2 o 3 }*

● Per calcular l'espai mostral associat a un experiment aleatori el diagrama d'arbre és molt utilitzat.

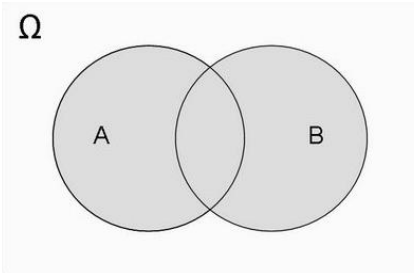
Ex: Quin és l'espai mostral associat a E = { llançament de dues monedes }



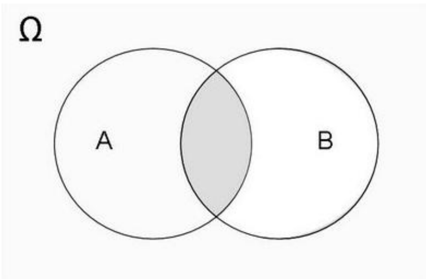
Quatre esdeveniments elementals,
E={cara cara, cara creu, creu cara, creu creu}

Operacions amb esdeveniments

i) **Unió**. Donats dos esdeveniments A i B, s'anomena unió o AUB, a l'esdeveniment que es verifica quan es dona A **o** quan es dona B.



ii) **Intersecció**. Donats dos esdeveniments A i B, l' intersecció o A∩B, és l'esdeveniment que es verifica quan es dona A **i** es dona B.



iii) **Diferència**. Donats dos esdeveniments A i B, la diferència o A – B és l'esdeveniment on es dona A però no es dona B.

Ex: En llançar un dau tenim dos possibles esdeveniments,

A = { obtenir un nombre parell } = { 2, 4, 6 }
B = { obtenir un nombre major a 4 } = { 5, 6 }

AUB = { 2, 4, 5, 6 }
A∩B = { 6 }
A – B = { 2, 4 }
B – A = { 5 }

● Dos esdeveniments A i B,
són compatibles si A∩B ≠ Ø, es a dir, si es poden donar a la vegada
són incompatibles si A∩B = Ø, si no es poden donar a la vegada

● Propietats:

	Unió	**Intersecció**
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Idempotent	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificació	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Element neutre	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap E = A$
Absorció	$A \cup E = E$	$A \cap \varnothing = \varnothing$

Totes aquestes propietats fan que el conjunt d'esdeveniments associats a un experiment aleatori constitueix una **àlgebra de Boole**. En l'àlgebra de Boole anterior es verifiquen les **lleis de De Morgan**:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

<u>Probabilitat d'un esdeveniment</u>

La probabilitat, P, és una funció que associa a cada esdeveniment d'un experiment aleatori un nombre entre 0 i 1, i que mesura la facilitat que es doni aquest esdeveniment. Així, per un esdeveniment A,

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Propietats:

- P (esdeveniment segur) = 1, P (Ω) = 1
- P (esdeveniment impossible) = 0, P (Ø) = 0

Ex: Fem un experiment aleatori consistent en agafar, a l'atzar, una bola d'una bossa on hi ha 4 boles de la mateixa mida i pes, però de color diferent: blanc, vermell, blau i verd.

a) Quin és l'espai mostral?

Ω = { bola blanca, bola vermella, bola blava, bola verda }

b) Descriu un esdeveniment segur i un impossible

Esdeveniment segur: A = { agafar una bola que no sigui groga }
Esdeveniment impossible: B = { agafar una bola negra }

c) Trobeu la probabilitat assignada a cada esdeveniment elemental

Com les quatre boles tenen la mateixa mida i pes, la probabilitat d'agafar una bola d'un color o un altre és la mateixa. Així, hem de repartir la probabilitat total, que és 1, entre els esdeveniments elementals.

$$P(blanca) = P(vermella) = P(blava) = P(verda) = \frac{1}{4}$$

Càlcul de probabilitat. Regla de Laplace

En un experiment aleatori regular, on tots els esdeveniments elementals són equiprobables, la probabilitat d'un esdeveniment A és:

$$\text{p(A)} = \frac{n^o \ de \ casos \ favorables}{n^o \ de \ casos \ possibles}$$

Ex: Tenim cinc boles d'igual pes i mida en una bossa: 1 verda, 2 blaves i 2 grogues. Si es treu una a l'atzar, quina és la probabilitat de que sigui verda? I groga?

Com la probabilitat d'agafar cadascuna de les boles és la mateixa, és un experiment regular i podem aplicar la Regla de Laplace,

$$P(V) = \frac{n^o \ de \ boles \ verdes}{n^o \ de \ boles \ total} = \frac{1}{5}$$

$$P(G) = \frac{n^o \ de \ boles \ grogues}{n^o \ de \ boles \ total} = \frac{2}{5}$$

Ex: Trobeu la probabilitat d'encertar els 6 nombres en el sorteig de la Loteria Primitiva.

Les 49 boles de la urna tenen la mateixa probabilitat de sortir, per la qual cosa és un experiment regular i podem aplicar la Regla de Laplace.
El nombre de casos favorables, sense tenir en compte l'ordre de sortida dels nombres és 1. El nombre de casos possibles és totes les combinacions de 49 elements, agafats de 6 en 6, sense importar l'ordre i sense que es puguin repetir els elements, es a dir, $C_{49,6}$.

$$P(premi) = \frac{n^o \ de \ casos \ favorables}{n^o \ de \ casos \ possibles} = \frac{1}{C_{49,6}} = \frac{1}{\binom{49}{6}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{49!}{6! \cdot 43!}} = \frac{1}{13983816} = 0{,}0000000715$$

● Propietats:

i) $p(A) \in [0, 1]$
ii) $p(E) = 1$
$p(\emptyset) = 0$
$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
iii) esdeveniments incompatibles : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
esdeveniments compatibles : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Ex: La probabilitat de que una persona porti ulleres és 0,6; la probabilitat que tingui ulls clars 0,3, i la probabilitat de que porti ulleres i tingui els ulls clars 0,24. Calculeu la probabilitat de que, a l'escollir una persona a l'atzar

a) No porti ulleres

A = { portar ulleres } $\quad P(A) = 0{,}60$
B = { tenir els ulls clars } $\quad P(B) = 0{,}30$
$P(A \cap B) = 0{,}24$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}60 = 0{,}40$$

b) Porti ulleres o tingui els ulls clars

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}60 + 0{,}30 - 0{,}24 = 0{,}66$$

c) No porti ulleres o no tingui els ulls clars

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}24 = 0{,}76$$

<u>Probabilitat d'esdeveniments dependents i independents. Probabilitat condicionada</u>

esdeveniments independents : $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$
esdeveniments dependents : $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$

Hi ha probabilitat de B condicionada a A, P(B/A), quan la probabilitat de B canvia segons s'ha donat o no l'esdeveniment A

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ex: En una classe hi ha 11 nois i 14 noies. De ells, 7 nois i 10 noies utilitzen normalment internet. Si escollim un estudiant a l'atzar,

a) Probabilitat de ser noia sabent que utilitza internet

A = { ser noia } $P(A) = \frac{14}{25}$

B = { ser noi } $P(B) = \frac{11}{25}$

C = { utilitzar internet } $P(C) = \frac{17}{25}$

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{10}{25}}{\frac{17}{25}} = \frac{10}{17}$$

b) Probabilitat de no utilitzar internet sabent que és noi

$$P(\overline{C} / B) = \frac{P(\overline{C} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{11}{25}} = \frac{4}{11}$$

Ex: Si agafem dues cartes de la baralla espanyola, quina és la probabilitat de que totes dues siguin d'ors?

Hem de diferenciar dues possibilitats:

a) Amb devolució, es a dir, agafem una carta, anotem de quina es tracta, la tornem a la baralla, i agafem altre vegada una carta. Són esdeveniments independents

$$P(1a\ or \cap 2ona\ or) = P(1a\ or) \cdot P(2ona\ or) = \frac{12}{48} \cdot \frac{12}{48} = \frac{1}{16}$$

b) Sense devolució, es a dir, agafem una primera carta que separem de la resta i després una segona carta. Són esdeveniments dependents ja que després de treure la 1a carta tenim menys cartes on escollir

$$P(1a\ or \cap 2ona\ or) = P(1a\ or) \cdot P(2ona\ or / 1a\ or) = \frac{12}{48} \cdot \frac{11}{47} = \frac{11}{188}$$

Teorema de la probabilitat total

Siguin $A_1, A_2, ..., A_n$, de manera que

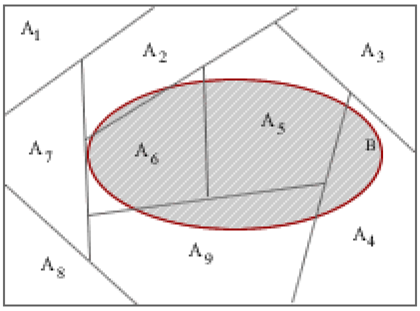
- són incompatibles entre ells: $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$;
- la seva unió és l'espai mostral: $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$

La probabilitat de qualsevol esdeveniment B serà

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)$$

$$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)] =$$
$$= P(B \cap A_1) + (B \cap A_2) + ... + (B \cap A_n) =$$
$$= P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + ... + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$



Ex: Un mateix producte es fabrica en tres empreses diferents. La següent taula mostra el percentatge de producte fabricat a cada empresa així com el percentatge de peces defectuoses en cada cas.

	E1	E2	E3
% Producció	40	25	35
% Defectuoses	2	5	3

Quina és la probabilitat de que una peça escollida a l'atzar sigui defectuosa?

F1 = { peça fabricada en E1 } $\quad P(F1) = \frac{40}{100} = 0{,}40$

F2 = { peça fabricada en E2 } $\quad P(F2) = \frac{25}{100} = 0{,}25$

F3 = { peça fabricada en E3 } $\quad P(F3) = \frac{35}{100} = 0{,}35$

D = { peça defectuosa }

F1, F2 i F3 són independents entre si, i la seva unió és l'espai mostral.

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(Fi)\cdot P(D/Fi) =$$
$$= P(F1)\cdot P(D/F1) + P(F2)\cdot P(D/F2) + P(F3)\cdot P(D/F3) =$$
$$= 0{,}40\cdot 0{,}02 + 0{,}25\cdot 0{,}05 + 0{,}35\cdot 0{,}03 =$$
$$= 0{,}0080 + 0{,}0125 + 0{,}0105 = 0{,}0310$$

La probabilitat de treure una peça defectuosa és de 0,0310. Col·loquialment diem que tenim una probabilitat del 3,10% de que la peça sigui defectuosa.

Teorema de Bayes

Siguin A_1, A_2, ..., A_n, de manera que

- són incompatibles entre ells: $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$;
- la seva unió és l'espai mostral: $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$

La probabilitat de l'esdeveniment A_j sabent que s'ha donat B és

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j)\cdot P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B/A_i)}$$

Ex: En el cas anterior, si una peça és defectuosa, quina és la probabilitat de que sigui de l'empresa 1?

	E1	E2	E3
% Producció	40	25	35
% Defectuoses	2	5	3

$$P(F1/D) = \frac{P(F1)\cdot P(D/F1)}{P(F1)\cdot P(D/F1) + P(F2)\cdot P(D/F2) + P(F3)\cdot P(D/F3)} =$$

$$= \frac{0{,}40\cdot 0{,}02}{0{,}40\cdot 0{,}02 + 0{,}25\cdot 0{,}05 + 0{,}35\cdot 0{,}03} = \frac{0{,}0080}{0{,}0310} = 0{,}2581$$

Llei de grans nombres

Quan un experiment aleatori el repetim un nombre molt elevat de vegades la freqüència relativa tendeix a aproximar-se a un valor fixe.

Quan no és possible utilitzar la Regla de Laplace utilitzarem la freqüència relativa obtinguda com valor de probabilitat.

Ex: Calculeu, sense utilitzar la Regla de Laplace, la probabilitat de que en llençar una moneda surti cara.

Es tracta de repetir la experiència de llançar una moneda a l'aire moltes vegades i anotar el nombre de vegades que surt cara.

Lanzamientos	100	150	200	300	400	500
fi	56	68	108	132	208	255
hi	0'56	0'45	0'54	0'44	0'52	0'51

Les freqüències relatives s'aproximen a 0,5, així que direm que P(C) = 0,5.