

## Tema 8: PROPORCIONALITAT NUMÈRICA

### Raó

La raó entre dos nombres, a i b, és el quocient entre ells

$$\text{Raó} = a / b$$

i la manera que s'indica la relació entre dues magnituds.

Ex: Hi ha 12 gelats de xocolata i 10 gelats de nata.

La relació entre gelats de xocolata i nata és de 12 a 10 → Aquesta relació es pot expressar mitjançant la raó 12 / 10.

### Proporció

És una igualtat entre dues raons

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \begin{array}{l} a, d \rightarrow \text{extrems} \\ b, c \rightarrow \text{mitjans} \end{array}$$

Ex: Per fer un pastís per 6 persones necessitem 3 ous, mentre que si fem un pastís per 8 persones necessitem 4 ous. El nombre d'ous i el nombre de racions mantenen una relació de proporcionalitat ja que, si establim la raó pel pastís de 6 persones i pel pastís de 8 persones, totes dues són iguals

Raó pastís 6 persones	3 ous / 6 racions
Raó pastís 8 persones	4 ous / 8 racions

i com  $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$  hi ha proporcionalitat

### • Constant o raó de proporcionalitat

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = K$$

Ex: En el cas anterior la raó de proporcionalitat entre el nombre d'ous i el nombre de racions és 1 / 2 ja que

$$3 / 4 = 6 / 8 = 1 / 2$$

Per aquest motiu direm que, per fer aquest pastís, es necessiten “ la meitat d'ous que racions “ ( expressió col·loquial no matemàtica ).

● Propietats:

i) En tota proporció, el producte d'extremes és igual al producte de mitjans

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Ex:

$$3 / 4 = 6 / 8 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot 8 = 6 \cdot 4$$

Observem que això s'aplicava per saber si dues fraccions eren equivalents

ii) La proporció no canvia si els mitjans o els extremes canvien entre si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

Ex:

$$8 / 4 = 6 / 3$$

Magnituds proporcionals

Dues magnituds són proporcionals si una depèn de l'altre i, a més, en multiplicar una d'elles per un nombre la quantitat corresponent de l'altre queda multiplicada o dividida pel mateix nombre.

Ex: Anem a comprar taronges i ens cobren per un quilogram 3 €.

*Magnituds :* - massa de taronges ( kg )  
- preu ( € )

*Aquestes magnituds depenen una de l'altre ja que quan més compri més pagaré,*

*a més són proporcionals perquè si compro dos kg de taronges pagaré el doble ja que si multipliquem per 2 la massa el preu queda multiplicat per 2.*

Ex: Observem el pes d'un nadó els tres primers mesos

Mesos	1	2	3
Pes ( Kg )	4,5	5,0	6,0

*Si bé en augmentar el temps augmenta el pes aquestes magnituds no són proporcionals ja que:*

$$1 / 4,5 \neq 2 / 5$$

Les magnituds poden ser:

- Directament proporcionals: en augmentar una de les magnituds l'altre augmenta ( totes dues queden multiplicades pel mateix nombre )  
Exemple: el nombre de persones i el nombre de sabates
- Inversament proporcionals: en augmentar una de les magnituds l'altre disminueix ( una es multiplica per un nombre i l'altre queda dividida pel mateix nombre)  
Exemple: el nombre de persones que treballen per fer una determinada feina i el temps que es necessita per realitzar-la

### Magnituds directament proporcionals

Són característiques que es poden mesurar i que depenen una de l'altre de manera que en augmentar o disminuir una d'elles l'altre augmenta o disminueix de la mateixa forma. Es a dir, en multiplicar ( o dividir ) una d'elles per un nombre, l'altre queda multiplicada ( o dividida ) pel mateix nombre.

Ex: Dues capsas de bombons costen 7 €

	↻ x 2		
Nº de capsas	2	4	1
Preu ( € )	7	14	3,5
	↻ x 2		
		↻ : 2	

En general, dues magnituds A i B són directament proporcionals si en formar raons amb els valors corresponents de totes dues magnituds la constant de proporcionalitat és la mateixa.

Magnitud A	$a_1$	$a_2$	...	$a_n$
Magnitud B	$b_1$	$b_2$	...	$b_n$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = K$$

Ex: Un vehicle té un consum mitjà de 8 litres de gasolina cada 100 Km. Les magnituds “consum de gasolina” i “distància” són directament proporcionals?

*Fem una taula on es mostri el consum de gasolina i la distància recorreguda*

<i>Distància ( Km )</i>	<i>100</i>	<i>200</i>	<i>300</i>	<i>400</i>
<i>Consum ( l )</i>	<i>8</i>	<i>16</i>	<i>24</i>	<i>32</i>

si ara fem raons amb els valors corresponents de totes dues magnituds s'observa que totes són iguals, la constant de proporcionalitat sempre és la mateixa.

$$\frac{100}{8} = \frac{200}{16} = \frac{300}{24} = \frac{400}{32} = 12,5$$

El "consum de gasolina" i la "distància" són magnituds directament proporcionals.

- Per calcular la quantitat corresponent d'una magnitud, es col·loquen les dades en columnes i es treballa amb fraccions equivalents.

Ex: Per cada 60 persones que acudeixen a un comerç es rifen 8 obsequis. Quants regals es rifaran si acudeixen 180 persones?

Es una proporcionalitat directe perquè a més persones més obsequis

<i>Nº de persones</i>	<i>Nº d'obsequis</i>
60	8
180	x

$$\frac{60}{180} = \frac{8}{x} \rightarrow 60x = 180 \cdot 8 \rightarrow x = \frac{180 \cdot 8}{60} = 24$$

*Es rifaran 24 obsequis*

### Magnituds inversament proporcionals

Són característiques que es poden mesurar i que depenen una de l'altra de manera que en augmentar ( o disminuir ) una d'elles l'altra disminueix ( o augmenta ) de la mateixa forma. Es a dir, en multiplicar ( o dividir ) una d'elles per un nombre, l'altra queda dividida ( o multiplicada ) pel mateix nombre.

Ex: Dues persones necessiten cinc dies per fer una obra

	x 2		
Nº de persones	2	4	1
Nº de dies	5	2,5	10
	: 2		
	x 2		

Dues magnituds A i B són inversament proporcionals si el producte dels valors corresponents a les dues mesures es manté constant.

Magnitud A	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	...	a <sub>n</sub>
Magnitud B	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	...	b <sub>n</sub>

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = \dots = a_n \cdot b_n$$

Ex: Una granja ha calculat que si tingués 12 vaques el pinso duraria 70 dies, i que si el nombre de vaques fos 20 hi hauria pinso per 42 dies. Les magnituds “nombre de vaques” i “dies que dura el pinso” són inversament proporcionals?

*Fem una taula amb les dades ordenades,*

<i>Nº de vaques</i>	<i>12</i>	<i>20</i>
<i>Dies que dura el pinso</i>	<i>70</i>	<i>42</i>

*veiem que en augmentar el nombre de vaques el nombre de dies disminueix, per la qual cosa no pot ser una relació directa. Anem a veure si és inversa:*

$$\begin{aligned} 12 \cdot 70 &= 840 \\ 20 \cdot 42 &= 840 \end{aligned}$$

*com dona el mateix resultat podem concloure que són magnituds inversament proporcionals.*

- Per calcular la quantitat corresponent d’una magnitud es col·loquen les dades en columnes i es treballa amb fraccions equivalents, però abans de posar la igualtat una de les fraccions “es gira”.

Ex: Per omplir un dipòsit en necessiten 2 hores si l’aigua raja d’una aixeta. Quant temps es necessitarà si l’aigua cau de tres aixetes a la vegada?

*Es una proporcionalitat inversa perquè a més aixetes menys temps*

<i>Nº d’aixetes</i>	<i>Temps ( h )</i>
<i>1</i>	<i>2</i>
<i>3</i>	<i>x</i>

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{2} \rightarrow 1 \cdot 2 = 3 \cdot x \rightarrow x = \frac{2}{3} = 0,67h = 20 \text{ min}$$

*Es necessitaran 20 minuts*

### Percentatges

Un percentatge o tant per cent és la forma d’expressar una proporció referida a una quantitat de cada 100 unitats. Així, un 20 % representa agafar 20 de 100 unitats.

- El càlcul de percentatges és un tipus de proporcionalitat directa.

Ex: Quin és el 30% de 18?

<i>Parcial</i>	<i>Total</i>
30	100
$x$	18

$$\frac{30}{x} = \frac{100}{18} \rightarrow 30 \cdot 18 = 100 \cdot x \rightarrow x = \frac{30 \cdot 18}{100} = 5,4$$

*El 30% de 18 és 5,4.*

Ex: En un hospital de 350 llits hi ha 280 ocupats, quin percentatge de llits ocupats hi ha?

*Em demanen que si haguessin 100 llits quants estarien ocupats*

<i>Ocupats</i>	<i>Total</i>
280	350
$x$	100

$$280/x = 350/100 \rightarrow 280 \cdot 100 = 350 \cdot x \rightarrow x = 280 \cdot 100 / 350 = 80$$

*Un 80% dels llits estan ocupats.*

Ex: Una enquesta dins una empresa mostra que el 20% dels empleats utilitzen regularment el *facebook*. Si el nombre de persones de l'empresa que utilitza aquesta xarxa social d'internet és de 540, quina és la plantilla de l'empresa?

*Ens diuen que d'un total desconegut de persones 540 utilitzen facebook el que representa cada 100 empleats 20,*

<i>Facebook</i>	<i>Total</i>
20	100
540	$x$

$$20 / 540 = 100 / x \rightarrow 20 \cdot x = 100 \cdot 540 \rightarrow x = 100 \cdot 540 / 20 = 2700$$

*Hi ha 2700 treballadors.*