TEMA 9 : Aplicacions de les derivades

Activitats

1. Calculeu el punt per al qual la derivada de la funció $f(x) = 2x^3 – 3x + 2$ val -1

2. Calculeu la derivada de les següents funcions i el punt pel qual el valor de la derivada és 0

   a) $y = \ln(3x^2 + x)$

   b) $y = \ln 3x^2 + x$

   c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^x + 1}$

   d) $y = \sqrt{4 + e^2} + \cos\dfrac{1}{1 + x}$

3. Trobeu l'equació de la recta tangent i normal a la corba d'equació
$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$
en el punt d'abscissa x = 0. Determineu els punts on la tangent a la corba és horitzontal.

4. Calculeu l'equació de la recta tangent i normal a la corba $f(x) = x^2$ en el punt d'abscissa 2

5. En quin punt de la corba de la funció $f(x) = x·\ln x – x$, la pendent de la recta tangent val 1.

6. Trobeu una funció de segon grau sabent que passa per punt P(1,0) i que la pendent de la recta tangent en el punt Q(2,-1) val 0.

7. Trobeu una equació de segon grau tal que f(0) = 2 , f '(0) = -4 i f ''(0) = 6

8. Trobeu una funció y = f(x) que compleix les següents condicions:
   a) $F'(x) = 3x^2 + 4x + 5$
   b) Passa pel punt P (-2, 6)

9. Determineu l'equació de la recta tangent a la paràbola d'equació $y = x^2$ paral·lela a la recta d'equació y = 4x.

10. Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $f(x) = x^2 -3x + 4$ paral·lela a la recta d'equació 3x – y = 2

11. En quins punt la tangent a la corba f (x) = $6x^3 + 9x^2 - 2$ és paral·lela a l'eix OX.

12. Determineu *m* de manera que la tangent a la corba y = $- x^2 - (2m + 1)x + m + 2$ en x = 2, sigui paral·lela a la recta $3x - y + 2 = 0$.

13. Sigui la funció f(x) = $x^2 + ax + 3$, determineu el valor de *a* perquè la gràfica de f tingui una tangent en el punt d'abscissa x = 1 paral·lela a la recta $2x + y = 0$.

14. Determineu l'equació de la recta tangent a f(x) = $x^2 + 4x + 1$ que té una inclinació de 30º.

15. Trobeu les equacions de les rectes tangents a la corba f(x) = $x^3 - 3x^2 + 5x + 1$, amb pendent 5. Hi ha alguna amb pendent 1?. Hi ha cap valor de pendent al qual correspongui una única recta tangent?.

16. Determineu l'equació de la recta tangent a la corba f(x) = $2x^2 - 3x + 5$ paral·lela a la bisectriu del primer quadrant.

17. Donades les funcions $f(x) = x^2 - ax - 4 \quad i \quad g(x) = \frac{x^2}{2} + b$
    a) Calculeu *a* i *b* de manera que les gràfiques de f(x) i de g(x) siguin tangents en el punt d'abscissa x = 3 , es a dir, que tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt.
    b) Trobeu l'equació d'aquesta recta tangent.

18. Trobeu les equacions de les rectes normals a la funció y = $2x^3 + 3$ en els punts x=1 i x=-1. Com són aquestes rectes entre si?

19. Donada la funció

$$f(x) = \frac{2x}{x+5}$$

    Determineu els valors de *a* i *b* perquè l'equació de la recta tangent a f(x) en el punt (-3,-3) sigui y=ax+b

20. Trobeu els valors de *a* i *b* perquè la recta tangent a f(x) = ax^2-b en el punt (1,5) sigui y=3x+2.

21. Trobeu el domini de la funció f(x) = ln ($1 + x + x^2$) i els punts en els quals la tangent a la corba és paral·lela a la bisectriu del primer quadrant

22. Donada la funció f(x) = $\frac{3-2x}{x}$
    a) Trobeu els punts de la gràfica en els quals la recta tangent és paral·lela a 3x+4y+5=0
    b) Calculeu les equacions d'aquestes rectes tangents

23. Considereu la funció

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & si \quad x\le 1 \\ -x^2+4x-3 & si \quad 1<x\le 3 \\ \dfrac{x-3}{x} & si \quad x>3 \end{cases}$$

Determineu el punt de la gràfica on la recta tangent té pendent 0
Què més podem afirmar sobre aquest punt?. Justifica la resposta.

24. Donada la funció $y=\dfrac{4}{x}$,

determineu els punts A i B pels quals les rectes tangents en A i B es tallen en el punt (4,-8)

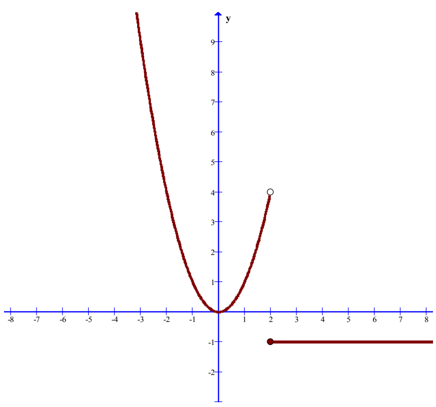
25. Indiqueu si les següents funcions són creixents o decreixents al voltant de 0

a) $f(x)=3x+1$
b) $y=\sqrt{2x+1}$
c) $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$
d) $y=x^3-3$
e) $y=\ln x$
f) $y=x^2+e^x$

26. Estudieu els intervals de creixement/decreixement de les funcions:

a) $y=4x^3-6x^2-105x+7$
b) $f(x)=\dfrac{x^2+9}{x}$
c) $g(x)=x\cdot e^x$
d) $y=x^3-3$
e) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$
f) $y=\dfrac{x^2-2x+1}{e^x}$

27. Indiqueu quin signe tindrà la derivada en la funció indicada. Raoneu la resposta.



28. Calcula els extrems relatius de $y=x^3-6x^2+9x+1$ en l'interval [1,4]. Els punts trobats són màxims o mínims absoluts?. Justifiqueu la resposta.

29. Considereu la funció $f(x)=1+\frac{a}{x}+\frac{6}{x^2}$, en què a és un paràmetre
    a) Calculeu el valor de a sabent que f(x) té un extrem relatiu en el punt d'abcissa x=3.
    b) Aquest extrem relatiu és un màxim o un mínim. Raoneu la resposta

30. Trobeu els paràmetres r, s i t perquè la funció $f(x) = x^3 - rx^2 + sx + t$ tinguin un màxim en x = - 2, un mínim en x = 0 i passi pel punt (1 , -1)

31. En els sis primers mesos des de que va obrir, una llibreria ha anat anotant el nombre de compradors cada mes. Aquest nombre N(x), es pot ajustar per la funció

$$N(x)=\frac{1000x-600}{x}$$

essent x el nombre del mes comptat des de que van obrir.
a) Quants compradors van tenir el segon mes?. En quin mes, comptant a partir de la obertura, van tenir 900 compradors?
b) Suposem que aquesta fórmula serveix per predir el nombre de compradors en el futur. Podem assegurar que aquest nombre anirà sempre en augment?. Expliqueu detalladament el perquè de la vostra resposta

32. Una entitat financera llença al mercat un pla d'inversió de rendibilitat del qual, R, en euros, ve donada per $R(x) = -0{,}01x^2 + 5x + 2500$, en què x és la quantitat que s'inverteix
    a) Quant ha d'invertir un inversor si vol obtenir una rendibilitat màxima?
    b) Calculeu aquesta rendibilitat màxima

33. El rendiment dels treballadors d'una fàbrica (valorat en una escala de 0 a 100), durant una jornada de 8 hores, ve donada per la funció

$$r(t)=\begin{cases}-10t^2+60t & si \quad 0\le t<4\\ 80 & si \quad 4\le t<6\\ 170-15t & si \quad 6\le t\le 8\end{cases}$$

en què t és el temps en hores.
a) Determineu els intervals de creixement i decreixement. Quin és el rendiment màxim?
b) En quins instants de la jornada laboral el rendiment es situa a la meitat de l'escala?

34. Determineu els intervals de concavitat i convexitat, i els punts d'inflexió, de les funcions

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

c) $y = \sqrt{9 + x^2}$

d) $f(x) = (x - 3)\, e^x$

e) $y = \ln (x^2 - x)$

f) $y = \dfrac{x}{e^x}$

35. La derivada d'una funció és $f\,'(x) = x^2 - 1$. Representeu gràficament $f\,'(x)$ i dedueix d'aquesta gràfica els intervals de creixement i de concavitat de f(x)

36. La funció

$$B(x) = \frac{-x^2 + 9x - 16}{x}$$

representa, en milers d'euros, el benefici net d'un procés de venda, en què x és el nombre d'articles venuts. Calculeu el nombre d'articles que s'han de vendre per obtenir el benefici màxim i determina aquest benefici màxim.

37. Determineu com han de ser tres nombres reals positius perquè sumin 100, la suma del primer més dues vegades el segon més tres vegades el tercer sigui 200 i el seu producte sigui el més gran possible.

38. Una fàbrica de televisors ven cada aparell a 300 €. Les despeses derivades de fabricar x televisors son $D(x) = 200x + x^2$, on $0 \leq x \leq 80$.
    a) Suposant que es venguin tots els televisors que es fabriquen, trobeu la funció dels beneficis que s'obtenen després de fabricar i vendre x televisors
    b) Determineu el nombre d'aparells que convé fabricar per obtenir el benefici màxim, i determineu, també, aquest benefici.

39. El cost de fabricació en euros de x unitats d'un article ve donat per la funció $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 20$. Quina és la funció que en determina el cost de fabricació unitari?. Per a quina producció resulta mínim el cost unitari?. Quant val aquest cost?. Justifica que és mínim.

40. De tots els triangles rectangles de 5m d'hipotenusa, trobeu el d'àrea màxima.