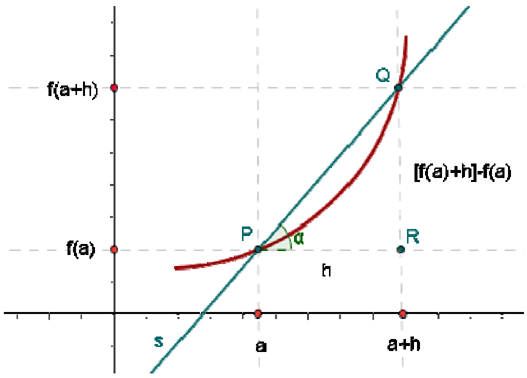
TEMA 9 : Aplicacions de les derivades

Derivades: aplicacions

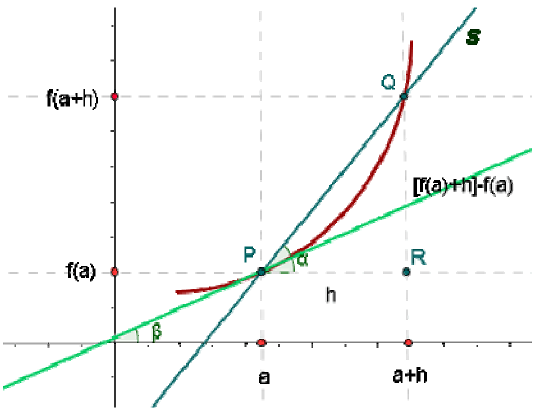
- Recta tangent i normal a una corba en un dels seus punts
- Creixement i decreixement d'una funció. Màxims i mínims
- Concavitat i convexitat d'una funció. Punts d'inflexió
- Problemes d'optimització

Recta tangent i normal a una corba en un dels seus punts

Recordem que el quocient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, s'anomena *taxa de variació mitjana* i gràficament és la pendent de la recta secant a la corba que passa pels punts P = (a, f(a)) i Q = (a + h, f(a + h))



Observem que si el punt Q s'apropa al punt P fins al punt que h és pràcticament 0, la recta ara és tangent a la corba, ja que només la toca en un punt i el límit, $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, si existeix és ara el pendent d'aquesta nova recta que coincideix amb la derivada de la funció f en el punt x_0 = a. Es a dir, gràficament f'(a) és el pendent de la recta tangent a la gràfica de f(x) en el punt d'abscisses x_0 = a , ja que f'(a) = tg α



Així, l'obtenció de la recta tangent a una corba en un dels seus punts és l'aplicació més immediata de les derivades.

Recordem que l' equació punt-pendent d'una recta és:

$y - y_0 = m\cdot(x - x_0)$ on m és el pendent i (x_0,y_0) és un punt de pas

si f(x) és derivable en x_0, el pendent de la recta tangent en el punt $P=(x_0,y_0)$ és $f'(x_0)$ i l'equació de la recta tangent a la gràfica de f(x) en aquest punt és:

$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)}$ *Equació de la recta tangent*

Ex: Trobeu l'equació de la recta tangent a la corba $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x+3}$ en $x_0 = 3$

f és continua i derivable en x_0

$$y_0 = y(3) = \frac{9-6}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+3)-(x^2-2x}{(x+3)^2} = \frac{2(x^2+3x-x-3)-x^2+2x}{(x+3)^2} =$$

$$\frac{2x^2+6x-2x-6-x^2+2x}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x-6}{(x+3)^2}$$

$$f'(3) = \frac{9+18-6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

Equació de la recta tangent: $\boxed{\left(y-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}(x-3)}$

Anomenem *recta normal* a una corba en un dels seus punt, a la recta perpendicular a la recta tangent a la corba en aquest punt.
Recordant la condició de perpendicularitat de dues rectes, la pendent de la recta normal a la funció f(x) en el punt x_0 serà: $\dfrac{-1}{f'(x_0)}$ i la seva equació serà:

$\boxed{y - y_0 = \dfrac{-1}{f'(x_0)}\cdot (x - x_0)}$ *Equació de la recta normal*

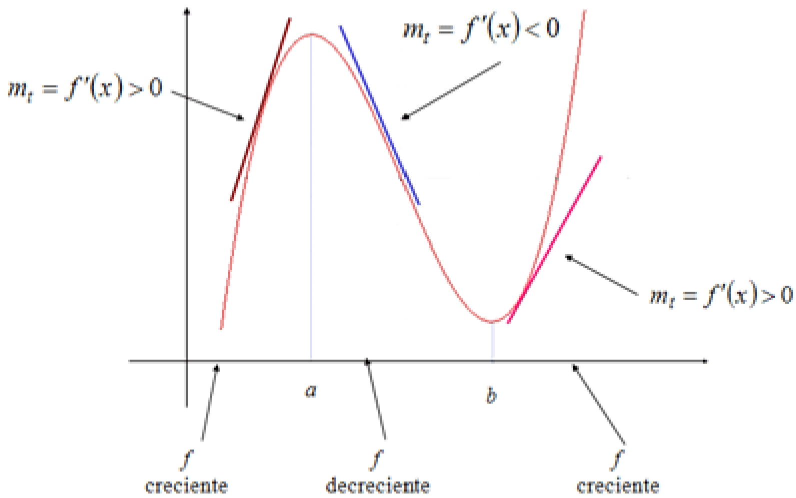
Ex: Trobeu l'equació de la recta normal a la corba del exemple anterior en el punt $x_0 = 3$

Equació de la recta normal: $\left(y-\frac{1}{2}\right) = \frac{-12}{7}(x-3)$

Creixement i decreixement d'una funció. Màxims i mínims

Una funció és creixent en un interval (a,b), si $\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$, si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Si f(x) és derivable en (a,b) $\Rightarrow f'(x)>0\ \forall x \in (a,b)$

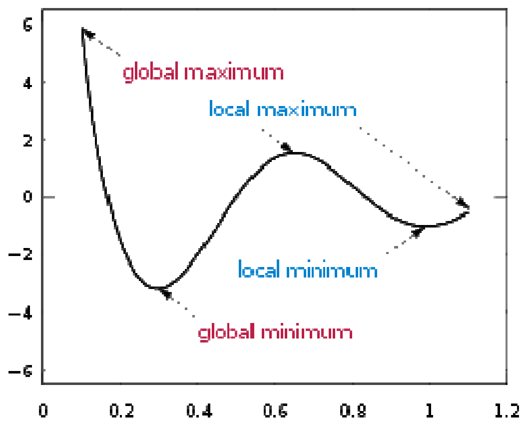
Una funció és decreixent en un interval (a,b), si $\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$, si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Si f(x) és derivable en (a,b) $\Rightarrow f'(x)<0\ \forall x \in (a,b)$



• S'anomenen extrems relatius (màxims o mínims) a aquells punts on el valor de la funció és màxim o mínim en un interval de la mateixa. En aquests punts la recta tangent a la corba serà horitzontal i el seu pendent 0, així,

f(x) té un màxim en x_0 si $f'(x_0)=0$ i $f''(x_0)<0$

f(x) té un mínim en x_0 si $f'(x_0)=0$ i $f''(x_0)>0$



Ex: Estudieu els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f(x) = x^3 - 3x + 2$
$f'(x) = 3x^2 - 3$

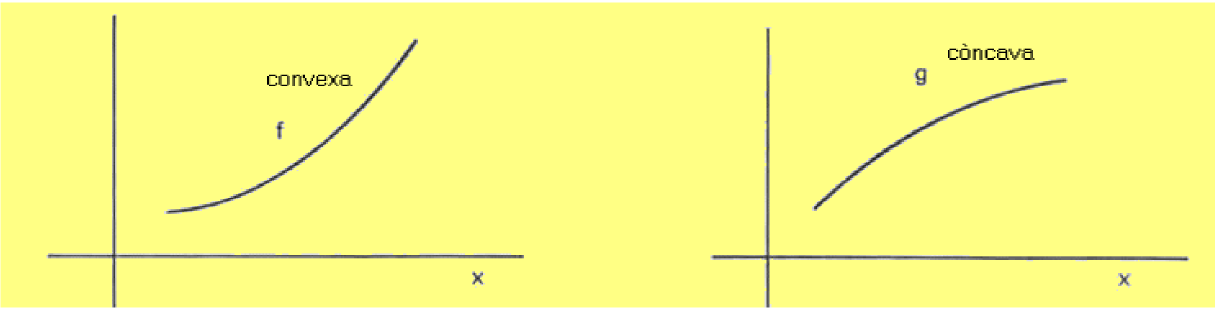
Possibles màxims o mínims de f(x) $\rightarrow f'(x) = 0$

$$3x^2 - 3 = 0$$
$$x = \pm 1$$

La recta real queda dividida en tres intervals

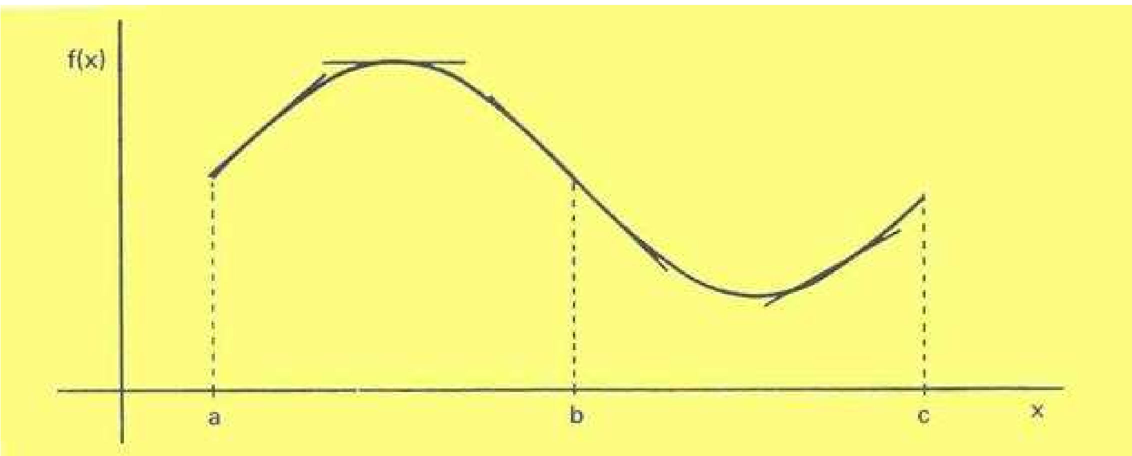
$(-\infty, -1)$	$\rightarrow x = -2$	$f'(-2) > 0$	*creixent*
$(-1, 1)$	$\rightarrow x = 0$	$f'(0) < 0$	*decreixent*
$(1, +\infty)$	$\rightarrow x = 2$	$f'(2) > 0$	*creixent*

Concavitat i convexitat d'una funció. Punts d'inflexió



Observem el següent gràfic,
f(x) és còncava en l'interval (a,b) quan les rectes tangents a la corba en els punts de l'interval es troben per sobre del gràfic. Si $f''(x)<0 \Rightarrow$ és còncava en x

f(x) és convexa en l'interval (b,c) quan les rectes tangents a la corba en els punts de l'interval es troben per sota del gràfic. Si $f''(x)>0 \Rightarrow$ és convexa en x



• S' anomena punt d'inflexió a aquell on es produeix un canvi de concavitat a convexitat o al revès (al gràfic x=b és un punt d'inflexió).

Si f (x) i f '(x) són derivables en x_0, si x_0 és un punt d'inflexió $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$
$f'''(x_0) \neq 0$

Ex: Punts d'inflexió de $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f(x) = x^3 - 3x + 2$
$f''(x) = 6x$

Possibles punts d'inflexió de f(x) $\rightarrow f''(x) = 0$
$6x = 0$
$x = 0$

$f'''(0) = 6 \neq 0$ *(0 , 2) és un punt d'inflexió de f(x)*

Resum de l'estudi de la concavitat, convexitat i punts d'inflexió.

$f''(a) > 0 \quad f \quad convexa \quad en \quad a$

$f''(a) < 0 \quad f \quad còncava \quad en \quad a$

$$f'(a) = 0 \begin{cases} f'''(a) \neq 0 \quad a \quad punt \quad d'inflexió \\ f'''(a) = 0 \begin{cases} f''''(a) > 0 \quad f \quad convexa \quad en \quad a \\ f''''(a) < 0 \quad f \quad còncava \quad en \quad a \\ f''''(a) = 0 \{ etc... \end{cases} \end{cases}$$

Problemes d'optimització

Es tracta de fer màxima o mínima una funció. Aquesta pot venir donada per una o dues incògnites, en aquest cas cal expressar una d'elles a partir de l'altre

Ex: S'ha de construir un dipòsit cilíndric de $81\pi\, m^3$ de volum. La superfície lateral ha de ser construïda amb un material que costa 30 €/m^2, i les dues bases amb un material que costa 45 €/m^2.

a) Determineu la relació que hi ha entre el radi r de les dues bases circulars i l'altura h del cilindre, i doneu el cost C (r) del material necessari per construir aquest dipòsit en funció de r
b) Quines dimensions ha de tenir el dipòsit perquè el cost dels materials necessaris sigui el mínim possible?

a)

Volum cilindre: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Superfície lateral: $S_l = 2\ \pi \cdot r \cdot h$

Superfície bases: $S_b = 2 \cdot \pi \cdot r^2$

Cost: $C = 30 \cdot S_l + 45 \cdot S_b$

$C(r, h) = 30 \cdot 2\ \pi \cdot r \cdot h + 45 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2$

La relació entre el radi r i l'altura h es calcula a partir del volum:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$81\pi = \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$h = \frac{81\pi}{r^2}$$

b)

Funció a minimitzar: $C(r, h) = 30 \cdot 2\ \pi \cdot r \cdot h + 45 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2$

$$C(r) = 60\ \pi \cdot r \cdot \frac{81\pi}{r^2} + 90\ \pi \cdot r^2$$

$$C(r) = \frac{4860\pi}{r} + 90\pi \cdot r^2$$

$$C'(r) = -\frac{4860\pi}{r^2} + 180\pi \cdot r$$

Extrems relatius: $C'(r) = 0$

$$0 = -\frac{4860\pi}{r^2} + 180\pi \cdot r$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{4860\pi}{180\pi}} = 3$$

Comprovem que r = 3 sigui un mínim amb la derivada segona:

$$C''(r) = \frac{9720\pi}{r^3} + 180\pi$$

$C''(3) > 0$ *a r = 3 hi ha un mínim*

radi = 3m i altura = 9 m