TEMA 9 : GEOMETRIA A L'ESPAI. POSICIONS RELATIVES

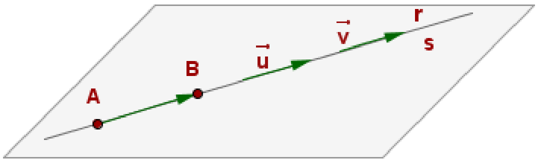
Posicions relatives de dues rectes a l'espai

r: $\dfrac{x-a_1}{u_1} = \dfrac{y-a_2}{u_2} = \dfrac{z-a_3}{u_3}$ $\quad A = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

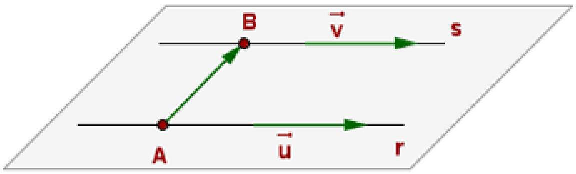
s: $\dfrac{x-b_1}{v_1} = \dfrac{y-b_2}{v_2} = \dfrac{z-b_3}{v_3}$ $\quad B = (b_1, b_2, b_3) \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}$ $\quad \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$

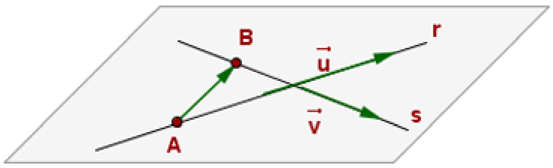
rang = 1 → RECTES COINCIDENTS



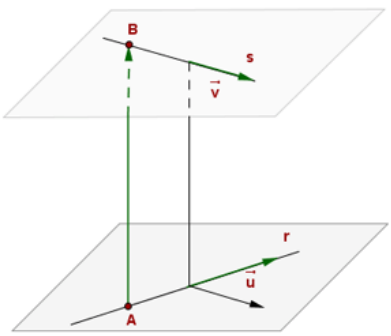
rang = 2 → RECTES PARAL·LELES
Vectors directors paral·lels (L.D)



→ RECTES SECANTS
Vectors directors no paral·lels (L.I)



rang = 3 → RECTES S'ENCREUEN
però no es troben en el mateix pla



Ex: Trobeu la posició relativa de les rectes

$$r : \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z}{3}$$

$$s : 5x - 2y + 1 = 0$$
$$-3y - 5z - 1 = 0$$

r: $A = (1, -2, 0)$ $\vec{u} = (2, 1, 3)$

s: $\left.\begin{array}{r} 5x - 2y \quad + 1 = 0 \\ -3y - 5z - 1 = 0 \end{array}\right\}$ $x = \frac{2y-1}{5}$, $z = \frac{-3y-1}{5}$

$y = \lambda$

$$(x, y, z) = \left(\frac{2y-1}{5}, y, \frac{-3y-1}{5}\right)$$
$$(x, y, z) = \left(\frac{2\lambda-1}{5}, \lambda, \frac{-3\lambda-1}{5}\right)$$
$$(x, y, z) = \left(\frac{-1}{5}, 0, \frac{-1}{5}\right) + \lambda \cdot \left(\frac{2}{5}, 1, \frac{-3}{5}\right)$$

$$B = \left(\frac{-1}{5}, 0, \frac{-1}{5}\right) \qquad \vec{v} = \left(\frac{2}{5}, 1, \frac{-3}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{-6}{5}, 2, \frac{-1}{5}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -6/5 & 2 & -1/5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2/5 & 1 & -3/5 \end{pmatrix} \qquad rang = 3$$

S' encreuen però no es troben al mateix pla

Posició relativa d'una recta i un pla

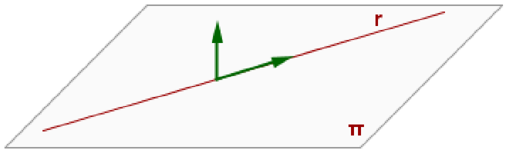
a) Sigui la recta r definida per dos plànols secants

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

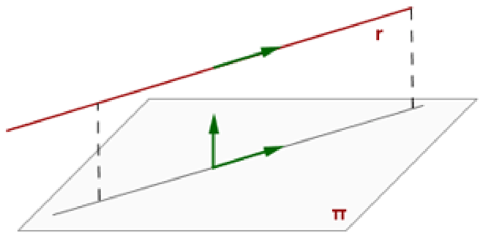
i el pla $\pi : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

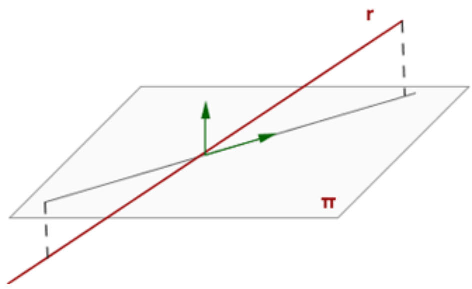
rang M = rang M* = 2 → RECTA CONTINGUDA AL PLA



rang M = 2
rang M* = 3 → RECTA I PLANS PARAL·LELS



rang M = rang M* = 3 → RECTA I PLA SECANTS



b) La recta està definida per un punt A i un vector $\vec{u}$ i un plànol amb vector associat $\vec{n}$.

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$
$A \in \pi$ → RECTA CONTINGUDA AL PLA

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$
$A \notin \pi$ → RECTA I PLA PARAL·LELS

$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$ → RECTA I PLA SECANTS

Ex: Posició relativa de la recta i el pla

$$r: \frac{x+1}{2} = y = -z \qquad\qquad \pi: x - 2y + 3z + 1 = 0$$

Es passa d'equacions contínues a implícites

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = -1 \\ y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = -1 \end{array}\right\}$$

trobem el rang de la matriu M

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

rang M = 3

*i determinem el rang M**

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

rang M = 3*

El pla i la recta es tallen en un punt

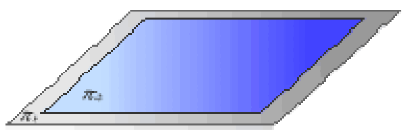
<u>Posició relativa de dos plans</u>

π_1: Ax + By + Cz + D = 0
π_2: A'x + B'y + C'z + D'= 0

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

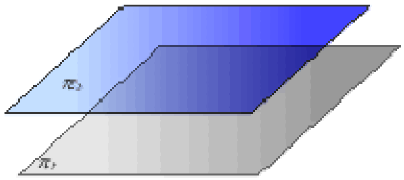
rang M = rang M* = 1 → PLANS COINCIDENTS

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$



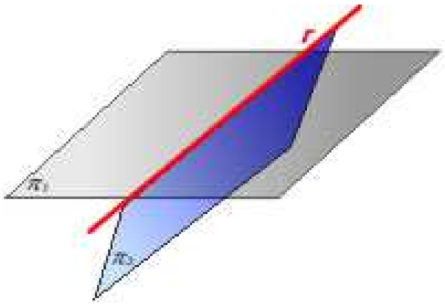
rang M = 1
rang M* = 2 → PLANS PARAL·LELS

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$



rang M = rang M* = 2 → PLANS SECANTS

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \text{ o } \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$



Ex: Estudieu la posició relativa dels plans

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 5z = -4 \\ 3x - y + 15z = 1 \end{array}\right\}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -4 \\ 3 & -1 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

rang M = rang M = 2 Plans secants*

Per trobar l'equació de la recta es soluciona el sistema i s'expressen dues variables en funció de l'altre

$$\left.\begin{array}{l} x + y = -4 + 5z \\ 3x - y = 1 - 15z \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} x + y = -4 + 5\lambda \\ \underline{3x - y = 1 - 15\lambda} \\ 4x = -3 - 10\lambda \end{array} \qquad \begin{array}{l} -3x - 3y = 12 - 15\lambda \\ \underline{3x - y = 1 - 15\lambda} \\ -4y = 13 - 30\lambda \end{array}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{-3-10\lambda}{4}, \frac{13-30\lambda}{-4}, \lambda\right)$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{-3}{4} - \frac{10\lambda}{4}, \frac{-13}{4} + \frac{30\lambda}{4}, \lambda\right)$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{-3}{4}, \frac{-13}{4}, 0\right) + \lambda \cdot \left(\frac{-10}{4}, \frac{30}{4}, 1\right)$$

Ex: Estudieu la posició relativa dels plans

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 5z + 4 = 0 \\ -3x - 3y + 15z - 12 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\frac{1}{-3} = \frac{1}{-3} = \frac{-5}{15} = \frac{4}{-12}$$

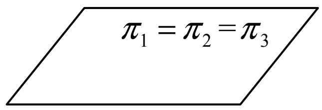
Plans coincidents

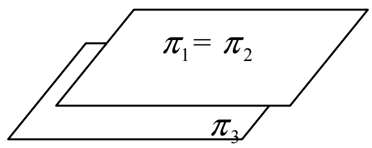
<u>Posició relativa de tres plànols</u>

π_1: A x + B y + C z + D = 0
π_2: A' x + B' y + C' z + D'= 0
π_3: A''x + B''y + C''z + D'' = 0

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

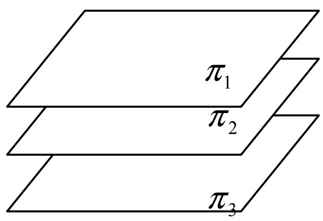
rang M = rang M* = 1 → PLANS COINCIDENTS





Dos coincidents i un paral·lel

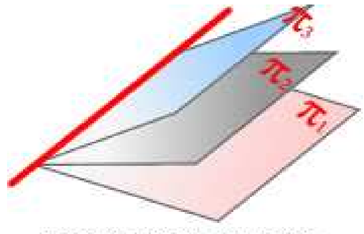
rang M = 1
rang M* = 2 → NO TENEN CAP PUNT EN COMÚ



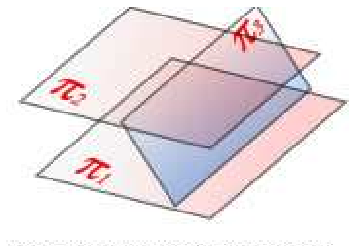
Plans paral·lels

Dos plans coincidents
i l'altre secant

rang M = rang M* = 2 → ES TALLEN EN UNA RECTA

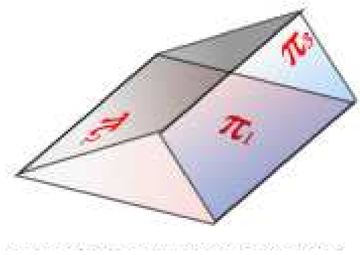


Tres plans diferents
i secants
(feix de plans)



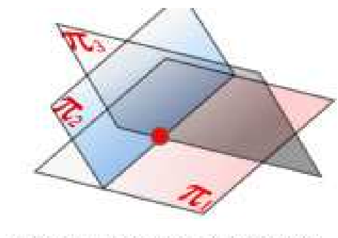
rang M = 2
rang M* = 3 → NO TENEN CAP PUNT EN COMÚ

Dos plans paral·lels
i altre secant



Secants dos a dos
(prisma triangular)

rang M = rang M* = 3 → PLANS SECANTS



Ex: Trobeu la posició relativa dels plans

$$\pi_1 : x + y - z + 3 = 0$$
$$\pi_2 : -4x + y + 4z - 7 = 0$$
$$\pi_3 : -2x + 3y + 2z - 2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = -3 \\ -4x + y + 4z = 7 \\ -2x + 3y + 2z = 2 \end{array}\right\}$$

det M $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ rang M = 2

$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ rang M* = 3

Plans secants dos a dos (prisma)

Ex: Quina és la posició relativa dels plans

$$\pi_1 : 2x - y + 2z + 1 = 0$$
$$\pi_2 : -4x + 2y - 4z - 2 = 0$$
$$\pi_3 : 6x - 3y + 6z + 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 2z = -1 \\ -4x + 2y - 4z = 2 \\ 6x - 3y + 6z = -1 \end{array}\right\}$$

det M $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ rang M = 1

$M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ rang M* = 2

Com rang M = 1 i rang M = 2 els tres plans no tenen cap punt en comú. Per saber si dos d'ells són coincidents cal estudiar els plans dos a dos*

$$\begin{aligned}\pi_1 &: 2x - y + 2z + 1 = 0 \\ \pi_2 &: -4x + 2y - 4z - 2 = 0\end{aligned} \qquad \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} \qquad \textit{Coincidents}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 &: -4x + 2y - 4z - 2 = 0 \\ \pi_3 &: 6x - 3y + 6z + 1 = 0\end{aligned} \qquad \frac{-4}{6} = \frac{2}{-3} = \frac{-4}{6} \neq \frac{-2}{1} \qquad \textit{Paral·lels}$$

El primer i el segon són coincidents i paral·lels al tercer