

REPÀS MATEMÀTIQUES CCSS

1. Tres famílies van a una gelateria. La primera demana 2 gelats petits i un de gran; la segona dos petits, un de mitjà i un de gran; i la tercera família en demana un de petit i 2 de grans. A la primera família li cobren 4,50€, a la segona 6,30€ i a la tercera 5,40€. Si denotem amb x , y i z les incògnites que representen, respectivament, el preu del gelat petit, mitjà i gran.
- a) Escriu la matriu A que expressa el preu dels gelats petit, mitjà i gran que compra cada una de les famílies de manera que $AX=B$, amb:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6,3 \\ 5,4 \end{pmatrix}$$

- b) Calcula A^{-1}
- c) Resol l'equació matricial $AX=B$
2. Els preus, en euros, de les entrades a un parc temàtic per a adults (AD) i nens i jubilats (NJ) en temporada alta (TA), temporada mitjana (TM) i temporada baixa (TB) són a la matriu P . El nombre de visitants, en milers, d'aquest parc al llarg de l'any és a la matriu N

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} TA & TM & TB \end{matrix} \\ \begin{matrix} AD \\ NJ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 7 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad N = \begin{matrix} & \begin{matrix} AD & NJ \end{matrix} \\ \begin{matrix} TA \\ TM \\ TB \end{matrix} & \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 350 & 300 \\ 125 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- a) Troba, si és possible, les matrius $P \cdot N$ i $N \cdot P$
- b) A quants euros puja la recaptació total corresponent a nens i jubilats? I la que correspon a la temporada baixa?
- c) Quin element de $P \cdot N$ o $N \cdot P$ ens dona informació sobre la recaptació total corresponents als adults?
- d) A quants euros puja la recaptació total?
3. Considera les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Resol l'equació matricial $AX+B^t = B$, on X és una matriu quadrada d'ordre 2.

4. Troba una matriu A que verifiqui:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Determina la matriu X en l'equació matricial $A^2X = \frac{1}{2}(A+BC)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Una empresa instal·la cases prefabricades de tres tipus, A, B i C. Cada casa de tipus A necessita 10 hores d'ofici de paleta, 2 de lampisteria i 2 d'electricista. Cada casa de tipus B necessita 15 hores d'ofici de paleta, 4 de lampisteria i 3 d'electricista. Cada casa de tipus C necessita 20 hores d'ofici de paleta, 6 de lampisteria i 5 d'electricista.

L'empresa empra exactament 270 hores de treball d'ofici de paleta, 68 de lampisteria i 58 d'electricista.

Quantes cases de cada tipus instal·la l'empresa en un mes?

7. Discuteix, en funció del paràmetre a, la solució del sistema d'equacions lineals següents. Troba'n la solució quan sigui possible.

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + az = -a \end{array} \right\}$$

8. Considera el sistema d'equacions següent

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ ax + 10y + 4z = 2 \end{array} \right\}$$

- Troba els valors de a per als quals el sistema no és compatible determinat
- Troba els valors de a per al qual $x=2$. Determina també els valors de y i de z en aquest cas.

9. Discuteix i resol el sistema següent per a tots els valors del paràmetre a . (Empra el mètode de Gauss per a la resolució)

$$\left. \begin{array}{l} 4x + ay - 2z = -1 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + (2a + 2) = 6 - a \end{array} \right\}$$

10. El sistema de quatre equacions i quatre incògnites:

$$5x+3y=1 \quad 5u+3v=2 \quad 3x+2y=-1 \quad 3u+2v=3$$

es pot expressar en la forma $AX=B$, en què A , X i B són matrius quadrades de 2×2 . Troba aquesta expressió i resol matricialment el sistema.

11. Resol el sistema següent

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = -1 \\ -3x + y - z = 7 \\ 2x - 3y + z = -12 \end{array} \right\}$$

12. Tres entitats financeres, A, B i C, ofereixen, respectivament, per a dipòsits superiors a 2000 €, un interès anual del 2%, 3% i $k\%$ (que no coneixem).

La Joana, en Manel i en Dani decideixen invertir els estalvis en aquestes entitats durant un any. Sabem que si tots ho fessin a l'entitat A, obtindrien en total uns beneficis de 164€; però si la Joana optés per A, en Manel per C i en Dani per B, obtindrien 192€; finalment, si la Joana i en Manel es decidissin per B i en Dani per C, obtindrien 218€.

- Escriu un sistema d'equacions que descriu la situació
- Sense resoldre el sistema, determina la quantitat total de diners invertida entre les tres persones
- Troba, si existeix, un valor de k per al qual hi hagi infinites solucions. Resol el sistema per a aquest valor de k , i dona les solucions.

13. D'un rombe ABCD coneixem les coordenades de tres vèrtexs. A és l'origen de coordenades, $B = (4,1)$ i $D = (1,4)$.

- Calculeu les coordenades del quart vèrtex C.
- Comproveu analíticament que les diagonals són perpendiculars i que es tallen en el seu punt mitjà.

14. Expliqueu raonadament algun mètode per decidir si tres punts del pla donats per les seves coordenades $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ i $C = (c_1, c_2)$ estan alineats o no ho estan.
Decidiu, tot aplicant el mètode que hagueu explicat, si els punts $(-2, -3)$, $(-3, 0)$ i $(6, 2)$ estan alineats o no.
15. Els punts $A = (1, 2)$ i $D = (5, 4)$ representen els vèrtexs oposats d'un quadrat.
- Calculeu el punt mitjà de la diagonal AD del quadrat (M serà el centre del quadrat)
 - Escriviu l'equació de la recta que passa per M i és perpendicular a la diagonal AD
 - Calculeu les coordenades dels altres dos vèrtexs B i C del quadrat
16. Els punts $A = (2, 5)$, $B = (6, 8)$ i $C = (22, d)$ estan alineats. Calculeu el valor de d.
17. Considereu els punts del pla $A = (3, 2)$, $B = (-1, 8)$ i $C = (k, k+4)$, k real. Calculeu el valor de k perquè A, B i C estiguin alineats.
18. Considera dos eixos perpendiculars de coordenades. Considera els punts O i A de coordenades $O = (0, 0)$ i $A = (9, 12)$. Una persona situada al punt O inicia un viatge en línia recta cap a A.
- Quina distància haurà de recórrer per anar de O a A?
 - Escriviu l'equació de la recta que haurà de seguir per anar de O a A
 - Digues quines seran les coordenades del punt P on es trobarà la persona quan hagi recorregut la tercera part de la distància de l'apartat anterior (sempre sobre la recta que uneix O amb A)
 - Si després d'haver recorregut el segment OP, quan arribi a P decideix dirigir-se cap al punt $Q = (7, 1)$, quin angle haurà de girar cap a la dreta? (Angle respecte a la trajectòria OP que havia seguit fins ara)
19. Sigui r la recta d'equació $3x - 5y + 2 = 0$. Troba les equacions de les rectes paral·lela i perpendicular a r que passen pel punt $(-15, 4)$
20. Determina el valor de a per tal que la recta $x - 2ay = 1$ i la recta $x + 3y = 8$ siguin
- Paral·leles
 - Perpendiculars
21. Considera els punts del pla $A(2, -1)$ i $B(0, 3)$ i la recta d'equació $x + y - 2 = 0$. Calcula les coordenades d'un punt C de r que estigui alineat amb A i B.

22. Escriu l'equació de les dues rectes que passen per (3,2) i formen un angle de 45° amb l'eix de les x

23. Sigui S la regió del pla de coordenades més grans o igual que zero i tal que els seus punts compleixen que:

- a) la mitjana aritmètica de les coordenades és menor o igual que 5
- b) el doble de l'abscissa més l'ordenada és més gran o igual que 5

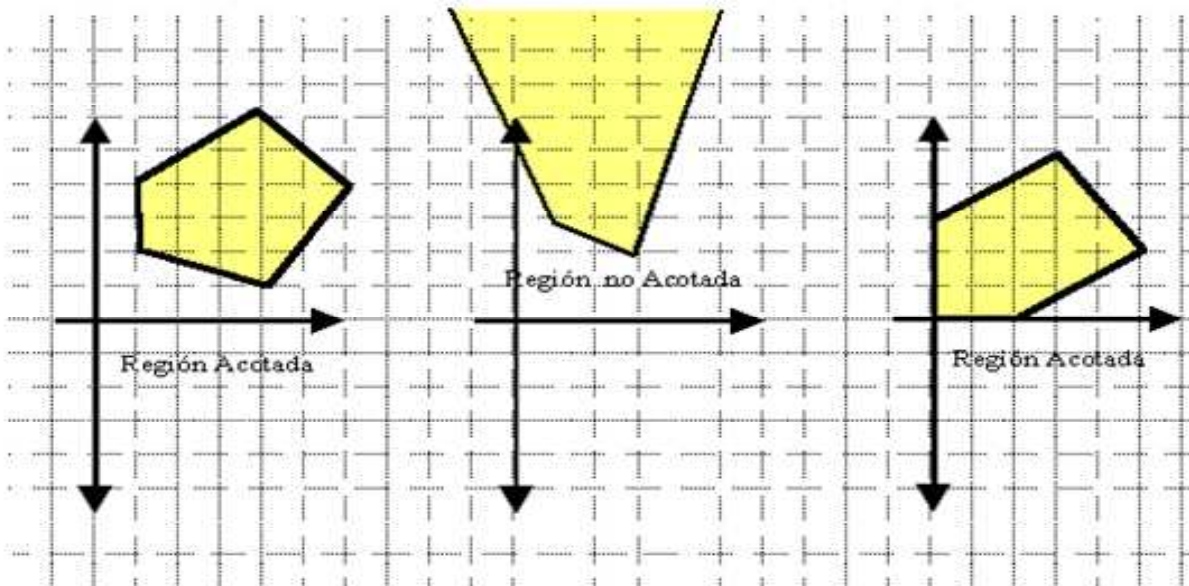
Representa gràficament el conjunt S. Determina en quin punt de S la funció $F(x,y) = 2x + y$ pren el valor màxim

24. Escriu un sistema d'inequacions (amb dues variables x i y) de tal manera que la regió del pla que determini aquest sistema sigui la regió ombrejada dels dibuixos següents:

a)

b)

c)



25. Un taller pot produir per dia com a màxim 12 articles de tipus A i 20 del tipus B. Cada dia el servei tècnic pot controlar un mínim de 20 articles i un màxim de 25, independentment del tipus.

a) Siguin x i y el nombre d'articles produïts per dia dels tipus A i B, respectivament. Expressen les condicions anteriors mitjançant un sistema d'inequacions en x i y

b) Representeu la regió del pla determinada per aquest sistema

c) Sabem que el benefici de produir els articles de tipus A és el doble del que s'obté amb els articles de tipus B. Trobeu quants articles de cada tipus ha de produir el taller per obtenir el benefici màxim.

26. Estudia la continuïtat de les funcions i classifica els tipus de discontinuïtat

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x+7}{x+1} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{x+1}{2x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

27. Calcula el valor del paràmetre a perquè la funció $f(x)$ sigui contínua

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

28. Determina a i b per tal que la funció sigui contínua:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ b \cdot e^x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

29. Indica quin tipus de discontinuïtat té la funció $f(x)$ si

- $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$
- $f(0) = 0$

30. Calcula la variació mitjana de les funcions següents en els intervals que s'indiquen:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ $[1, 3]$

b) $y = \sqrt{5x - 11}$ $[3, 8]$

31. Troba aplicant la definició de derivada com un límit, la derivada en $x = 3$ de la funció

$$y = \frac{1}{x-1}$$

32. Calcula fent servir la definició, la derivada de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

32. Calcula les derivades següents:

a) $y = 7x^4$

b) $y = \sqrt[6]{x^5}$

c) $y = x \cdot \sqrt{x}$

d) $y = \sin x \cdot \ln x$

e) $y = \frac{\log x}{5x}$

f) $y = \frac{x+5}{\sqrt{x}}$

g) $y = \ln \sqrt{x^3 - 2x^2}$

h) $y = \cos(x^2 - 3x)$

i) $y = (x^3 - 4) \cdot \sqrt{3x - 1}$

j) $y = \sqrt{\ln \sqrt{x}}$

k) $y = \sin \frac{2x-1}{x^2+3x}$

l) $y = x^{3x}$

m) $y = (\sin x)^{x^3}$

33. Estudia la continuïtat i derivabilitat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ 2x+1 & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2^x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

34. Estudia la continuïtat i la derivabilitat de la funció segons a i b

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + a & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{b} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

35. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de $y = |2x - 1|$

1.

b)
$$\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

c)

gelat petit → 1,20€

gelat mitjà → 1,80€

gelat gran → 2,10€

6. 10 cases de tipus A, 6 de tipus B i 4 de tipus C

13. C=(5,5)

18. a) $d(O,A) = 15$

b) $4x-3y = 0$

c) P = (3,4)

d) 90°

23. a)

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 0 \\ 2x + y \geq 5 \end{array} \right\}$$

b) (0,0)

25. c) 12 peces de A i 13 de B