

# EXERCICIS MATEMÀTIQUES 1r BATXILLERAT CT ESTIU 2015

El treball d'estiu està pensat per consolidar els conceptes treballats a primer de batxillerat que es necessiten per afrontar amb èxit el segon curs.

## TRIGONOMETRIA

Angles (  $180^\circ = \pi \text{ rad}$  )

### Raons trigonomètriques

$$\sin \alpha \in [-1,1]$$

$$\cos \alpha \in [-1,1]$$

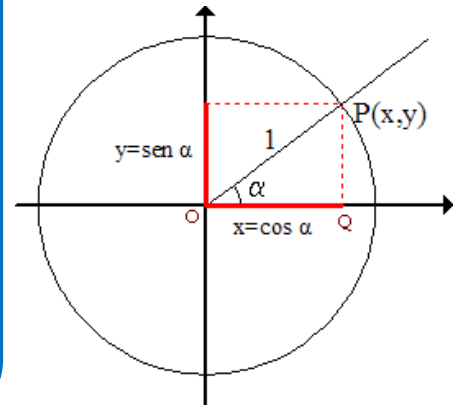
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \sin^{-1} \alpha$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \cos^{-1} \alpha$$

$$\operatorname{cotan} \alpha = \tan^{-1} \alpha$$

Entre  $0^\circ$  i  $360^\circ$  hi ha dos angles amb el mateix valor de sinus, cosinus o tangent



### Relacions: Identitats trigonomètriques

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha + 1}$$

$$\tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha - 1$$

( Resolució d'equacions trigonomètriques i problemes amb triangles )

### Operacions

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

( Resolució d'equacions trigonomètriques i càlcul d'integrals )

### Aplicacions

#### I. Triangles rectangles

$\sin \alpha = \text{cat oposat} / \text{hipotenusa}$

$\cos \alpha = \text{cat continu} / \text{hipotenusa}$

$\tan \alpha = \text{cat oposat} / \text{cat continu}$

#### II: Triangles no rectangles

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

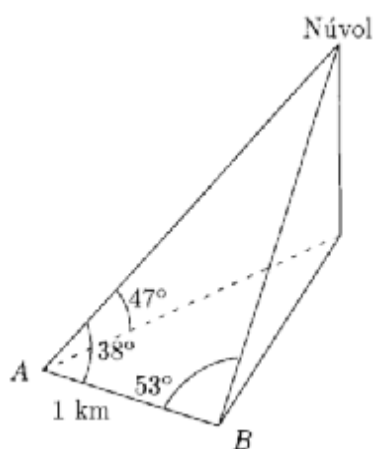
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

- Passeu a radians o graus:  
 $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 210^\circ, 235^\circ, 300^\circ, 400^\circ$   
 $\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \pi; 2\pi; \frac{7\pi}{6}; \frac{8\pi}{8}; \frac{5\pi}{3}$
- Quines són les raons trigonomètriques d'un angle?. Per què s'anomenen raons?
- Contesteu de manera raonada les següents preguntes:
  - Les raons trigonomètriques tenen unitats
  - Quins valors prenen els sinus i el cosinus de qualsevol angle?
  - Quins valors pot prendre la tangent d'un angle?
  - Quins angles tenen iguals, en valor absolut, el sinus i cosinus?
  - Si el cosinus de dos angles són iguals com poden ser entre si aquest dos angles si són més petits que  $360^\circ$ ?
  - Queda determinat un angle més petit que  $360^\circ$  si es coneix la seva tangent?
  - Hi ha algun angle més petit de  $360^\circ$  que tingui el sinus igual a la cosecant?, i el cosinus a la secant? I la tangent a la cotangent?.
- Completeu la taula:

| Angle   | $0^\circ$<br>0 rad | $30^\circ$<br>$\pi/6$ rad | $45^\circ$<br>$\pi/4$ rad | $60^\circ$<br>$\pi/3$ rad | $90^\circ$<br>$\pi/2$ rad |
|---------|--------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| Raó     |                    |                           |                           |                           |                           |
| sinus   |                    |                           |                           |                           |                           |
| cosinus |                    |                           |                           |                           |                           |
| tangent |                    |                           |                           |                           |                           |

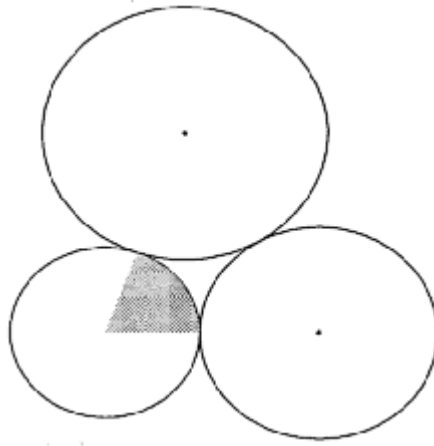
- Calculeu amb ajut de les fórmules la resta de raons trigonomètriques si sabem que:
  - $\cos a = -\frac{4}{5}$  i  $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
  - $\sin a = \frac{3}{5}$  i  $0^\circ \leq a \leq 90^\circ$
  - $\tan a = -2$  i  $\frac{3\pi}{2} \leq a \leq 2\pi$
  - $\cotan a = -2$  i  $90^\circ \leq a \leq 180^\circ$
- Si  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ , i l'angle és del tercer quadrant, trobeu amb ajut de les fórmules:
  - $\sin \alpha$
  - $\cos \alpha$
  - $\cos (90^\circ - \alpha)$
  - $\tan \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$
  - $\sin (180^\circ - \alpha)$

7. La hipotenusa d'un triangle rectangle fa 15 m i un catet fa 10 m. Resoleu el triangle ( trobeu el catet i els angles )
8. En una ruta de muntanya, un senyal indica una altitud de 785 m. Tres quilòmetres més endavant, l'altitud és de 1065 m. Quin és l'angle que forma aquest tram de ruta amb l'horitzontal?
9. El costat desigual d'un triangle isòsceles fa 40 cm i l'angle oposat és de  $40^\circ$ . Quina és la longitud dels costats iguals?
10. L'àrea del triangle de vèrtex A, B i C és de  $50\text{m}^2$ . L'angle en A d'aquest triangle és de  $45^\circ$  i l'angle en B és de  $30^\circ$ . Sigui D el peu de l'altura des del vèrtex C, es a dir, el punt del segment AB tal que CD és perpendicular a AB. Calculeu la longitud dels segments CD, AD, BD, AB, BC i AC.
11. Els costats d'un triangle són de longitud 8cm, 11cm, i 13 cm. Calculeu el valor del sinus de l'angle més petit.
12. Per mesurar l'altura d'un núvol s'han fet simultàniament dues observacions des dels punts A i B distants entre si 1 quilòmetre i situats tots dos al nivell del mar. La inclinació de la visual des de A al núvol respecte a l'horitzontal és de  $47^\circ$ . Els angles que formen les visuals des de A i des de B amb la recta AB són, respectivament, de  $38^\circ$  i  $53^\circ$  tal com s'indica a la figura següent:



Calculeu l'altura del núvol respecte al nivell del mar

13. La figura ens mostra tres jardins circulars mútuament tangents. Els radis d'aquests jardins són respectivament de 8, de 10 i de 12 metres. La zona del jardí més petit que està ombrejada en el dibuix (sector circular delimitat pels dos radis pels punts de tangència amb els altres dos jardins i l'arc de circumferència corresponent) es vol sembrar d'una gespa especial i es vol envoltar completament amb una petita tanca metàl·lica. Quina superfície té? Quina longitud de tanca farà falta?



14. Demostreu les identitats

- a)  $(\sec a + \tan a)(1 - \sin a) = \cos a$
- b)  $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$
- c)  $1 + \tan^2 a = \sec^2 a$
- d)  $\cos 2a = \cos^2 a - 1$

15. Simplifiqueu:  $2\operatorname{tg}x \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - \sin x$

16. Resoleu les equacions trigonomètriques:

- a.  $2 \cos x + 3 = 2$
- b.  $\sin^3 x - 2 = -3 \sin^3 x$
- c.  $\sin^2 x = 1 + \cos^2 x$
- d.  $\cos x - 2 \sin^2 x + 1 = 0$
- e.  $\sin x \cdot \cot x = \frac{1}{2}$
- f.  $2 \tan x - 3 \cot x - 1 = 0$
- g. 
$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \sin x - \sin y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$$
- h. 
$$\begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \cot(x + y) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

17. Escolliu i raoneu la resposta correcta

- a) Un parell de valors corresponents a sinus i cosinus determinen un únic angle entre  $0^\circ$  i  $360^\circ$
- b) Només hi ha un angle entre  $0^\circ$  i  $360^\circ$  amb un valor de cosinus de 0,5
- c) Les dues anteriors
- d) Cap de les dues anteriors

18. Sigui  $\alpha \in [\pi, 3\pi/2]$  amb  $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$ . Escolliu i raoneu la resposta correcta

a) La seva tangent és positiva

b) El seu sinus és  $-\frac{\sqrt{7}}{4}$

c) El seu arcsin és 0

d) Són certes a) i b)

19. Per resoldre:

“ En una ruta de muntanya, un senyal indica una altitud de 785 m. Tres quilòmetres més endavant, l'altitud és de 1065 m. Quin és l'angle que forma aquest tram de ruta amb l'horitzontal? “.Escolliu i raoneu la resposta correcta

a) Utilitzarem el teorema del sinus

b) Utilitzarem  $\sin \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}$

c) Utilitzarem  $\tan \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet continu}}$

d) Cap de les respostes anteriors

20. El llenguatge matemàtic és molt important. Raoneu si són o no correctes les següents expressions

a)  $\sin = 0,5$

b)  $\tan \alpha = -2$

c)  $\arccos \alpha = 4$

d)  $\arctan \alpha = 45^\circ$

## Tema : GEOMETRIA ANALÍTICA AL PLA

1. Feu un mapa conceptual com el mostrat en el tema anterior, esquema o resum de la teoria ( màxim dos fulls )
2. La notació (2,4)
  - a) Correspon a les components d'un punt
  - b) Correspon a les coordenades d'un vector
  - c) Correspon a un segment
  - d) Cap de les anteriorsRaoneu la resposta
3. Donats els punts  $A = (5,2)$  i  $B=(-4,3)$ . Trobeu les components dels vectors  $\vec{AB}$  i  $\vec{BA}$ . Definiu el mòdul, la direcció i sentit.
4. Un vector  $\vec{u}$  és equipol·lent a un altre vector  $\vec{v} = (-1,5)$ . Calculeu les coordenades del seu extrem sabent que el seu origen és (3,2)
5. Donats els vectors  $\vec{u}=(-2,0)$ ,  $\vec{v}=(-3,2)$ . Trobeu el vector  $(2\vec{u} + \vec{v})$
6. Calculeu m i n per tal que  $\vec{u} = m\vec{x} + n\vec{y}$  quan  $\vec{x} = (4,-8)$ ,  $\vec{y} = (0,2)$  i  $\vec{u} = (2,-1)$ .
7.
  - a) Què significa que dos vectors siguin linealment independents?
  - b) Què significa que dos vectors siguin base de  $V_2$ ?
  - c) Els vectors  $\vec{u}=(2,-3)$  i  $\vec{v}=(3,6)$  són linealment independents?. Raoneu la resposta.
  - d) Calculeu el valor de m pels quals els vectors  $\vec{u}=(m,-3)$  i  $\vec{v}=(2,7)$  són linealment dependents. Per quin valor de m aquests vectors seran una base?
8. Calculeu el producte escalar dels vectors:  $(-1,7)$  i  $(5,0)$ . Quin angle formen?
9. Trobeu el valor de m per tal que els vectors  $\vec{u} (4, -1)$  i  $\vec{v} (m, 2)$  siguin
  - a) perpendiculars
  - b) paral·lelsEn quins d'aquests dos casos els vectors seran linealment independents i, en conseqüència seran base dels vectors del pla?
10. Els punts  $(-3, 5)$ ,  $(-2, -3)$  i  $(0, 8)$  estan alineats?
11. Considereu els punts del pla  $A (3, 2)$ ,  $B (-1, 8)$  i  $C (a, a+4)$  a real. Calculeu el valor de a perquè els tres punts estiguin alineats.
12. Siguin els punts  $A=(3,-2)$ ,  $B=(1,3)$  i  $C=(-6,0)$ , trobeu el punt D de manera que ABCD sigui un paral·lelogram
13. Trobeu totes les equacions de la recta que passa per  $P=(3,2)$  i té la mateixa direcció que el vector  $\vec{v}=(-1,2)$ . El punt  $(-2, 5)$  pertany a la recta?

14. Trobeu l'equació de la recta que passa per  $A=(-1,3)$  i té pendent  $-2$ .

15. Completeu:

| Equació  | Tipus d'equació | Punt de pas | Vector director | Pendent |
|--|-----------------|-------------|-----------------|---------|
| $(x,y)=(0,3)+k(1,-5)$  |                 |             |                 |         |
| $\frac{x-1}{5} = y+3$  |                 |             |                 |         |
| $2x-y=0$   |                 |             |                 |         |
| $x=-y$   |                 |             |                 |         |
| $\left. \begin{array}{l} x=3-5k \\ y=k \end{array} \right\}$ |                 |             |                 |         |
| $-\frac{x}{4} = -y+3$  |                 |             |                 |         |
|  |                 |             |                 |         |

16. Trobeu el pendent de la recta que passa per  $A(-2,0)$  i  $B=(4,5)$  i escriviu les equacions implícita i explícita

17. Comproveu que el punt  $(3,-5)$  pertany a la recta  $3x-4=y$ . Obteniu dos punts de  $r$  i trobeu un vector director.

18. Trobeu l'equació de la recta que passa per  $(-7,1)$  i forma un angle de  $30^\circ$  amb l'eix OX.

19. Trobeu una recta paral·lela i una altre de perpendicular a  $r: \left. \begin{array}{l} x = -2k \\ y = 2 + k \end{array} \right\}$  que passin pel punt  $A=(3,-2)$

20. Donada la recta  $r$  que passa pels punts  $(3,-2)$  i  $(5,6)$ , trobeu la recta  $s$  paral·lela a l'anterior i que passa per l'origen de coordenades

21. Trobeu l'equació d'una recta perpendicular a  $3x-5y+1=0$  i que passi per  $(-3,2)$

22. Donada la recta  $r: -x+2y-6=0$ , trobeu:

- equació de la recta paral·lela a  $r$  i que passa per  $(2,-1)$
- perpendicular a  $r$  i que passa per  $(5,2)$

23. Calculeu  $n$  per tal que les rectes  $x-2y-5=0$  i  $3x+ny+1=0$  siguin

- paral·leles
- perpendiculars



24. Determineu  $m$  perquè les rectes d'equacions  $r: -mx + y - 10 = 0$  i  $s: x + 2y - 3 = 0$  formin un angle de  $60^\circ$

25. Estudieu les posicions relatives de  $r$  i  $s$ . Trobeu els punts de tall si hi ha.

$$\text{a) } r: \left. \begin{array}{l} x = 3 + 2K \\ y = -4 + 6K \end{array} \right\} \quad s: \quad 2x - 3 = y$$

$$\text{b) } r: \left. \begin{array}{l} x = 1 - 4K \\ y = 3K \end{array} \right\} \quad s: \quad 3x + 4y + 1 = 0$$

$$\text{c) } r: \quad 4x - 2y - 8 = 0 \quad s: \quad 2x - 4 = y$$

26. Trobeu l'angle que formen les rectes  $r: -x - 3y + 8 = 0$  i  $s: y = 2x - 1$

27. Calculeu la distància entre els punts  $A = (-1, 3)$  i  $B = (5, -2)$

28. Calculeu la distància del punt  $A = (-3, 4)$  a la recta  $2x + 3y - 10 = 0$

29. Calculeu la distància entre les rectes paral·leles  $x + 3y - 5 = 0$  i  $-x - 3y - 4 = 0$

30. Calculeu  $n$  per tal que la distància del punt  $P = (-2, 3)$  a la recta  $r: 4x + 3y + n = 0$  sigui 2.

31. Del triangle determinat per les rectes  $y = x + 2$ ,  $y = 2$  i  $5x - 2y - 10 = 0$  trobeu els vèrtexs i l'àrea.

32. Sigui l'equació d'una recta:  $y = \frac{x + 4}{2}$ . Quina és l'afirmació correcta?

- a) El pendent de la recta és 0,5
- b) El vector director de la recta és  $(4, 2)$
- c) La recta donada és coincident amb

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 3}{1}$$

- d) Totes les anteriors són correctes

Raoneu la resposta correcta

## Tema: EQUACIONS EXPONENCIAL I LOGARÍTMICA

1. Feu un esquema o resum de la teoria del tema i dels conceptes bàsics ( cal incloure les propietats de les potències i les arrels )

2. Resoleu les equacions exponencials següents:

$$a) 3^{x+1} = 27$$

$$b) 5^{x^2-2x} = 125$$

$$c) 2^{x^2-3x} = 1$$

$$d) 3^{2x-5} = \frac{1}{27}$$

$$e) \sqrt{a^{1-x^2}} = a^{-4}$$

$$f) \sqrt[6]{a^{x-1}} \cdot \sqrt{a^{2x+3}} \cdot \sqrt[3]{a^{x-2}} = \sqrt[6]{a^{8x+11}}$$

$$g) 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 9477$$

$$h) 4^{x-1} - 4^{x-2} - 4^{x-3} = 2816$$

$$i) 4^x - 2^x = 992$$

$$j) 2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$$

$$k) 2^{x+1} + 4^{x-1} = 96$$

$$l) 2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$$

$$m) 5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$$

$$n) 4 - 3^x = \frac{1}{3^{x-1}}$$

3. Trobeu la x

$$a) \lg_x \sqrt{2} = 4$$

$$h) \log_{\frac{4}{3}} x = -\frac{1}{2}$$

$$b) \lg_3 \frac{1}{3} = x$$

$$i) \ln x = -2$$

$$c) \lg_x 121 = 2$$

$$j) \log_{\frac{3}{2}} 1 = x$$

$$d) \lg_x 3 = 1$$

$$k) \lg_x \frac{1}{32} = -5$$

$$e) \log_x 1 = 0$$

$$l) \log x = -3$$

$$f) \ln e^6 = x$$

$$m) \ln 1 = x$$

$$g) \lg_3 \sqrt{3} = x$$

$$n) \log_x 11 = 2$$

4. Expresses com a combinació lineal de logaritmes

$$a) \log_5 \sqrt{\left(\frac{a^4 \cdot b \cdot c}{d^2 \cdot e}\right)^2}$$

$$b) \ln (x \cdot y)^2$$

5. Reduïu a un únic logaritme:

$$a) \log (4a) - 3 \log a + 8 \log 10$$

$$b) 2 \log b - 5 \log b + \frac{1}{2} \log b$$

$$c) \frac{3}{5} \log 4a - 2 \log a + \frac{4}{3} \log a$$

$$d) 3 \log x + 5 ( 2 \log y + 4 \log x )$$

6. Resoleu:

- a)  $3 \log_2 x - 4 \log_2 8 = 3 \log_2 3$   
 b)  $\ln(5 - x) = \ln 2 + \ln(4 - x)$   
 c)  $\log(x^2 + 2x - 39) - \log(3x - 1) = 1$   
 d)  $2 \log x = 2 + \log(x - 16)$   
 e)  $\log \sqrt[4]{x^3} - \log \sqrt{10} = \frac{1}{4}$   
 f)  $5 \log \frac{x}{2} + 2 \log \frac{x}{3} = 3 \log x - \log \frac{32}{9}$   
 g)  $\log x^2 = \log(x + \frac{11}{10}) + 1$   
 h)  $(x^2 - 5x + 9) \log 2 + \log 125 = 3$   
 i)  $\frac{\ln 2 + \ln(11 - x^2)}{\ln(5 - x)} = 2$

7. Resoleu:

- a) 
$$\left. \begin{aligned} 3^{2x+1} - 8 \cdot 4^{y-1} &= -5 \\ 3 \cdot 3^{x-2} + 4^{y+1} &= 17 \end{aligned} \right\}$$
- b) 
$$\left. \begin{aligned} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} &= 807 \\ 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y &= 339 \end{aligned} \right\}$$
- c) 
$$\left. \begin{aligned} x - y &= 9 \\ \log x - \log y &= 1 \end{aligned} \right\}$$
- d) 
$$\left. \begin{aligned} a^{x-y} &= a^4 \\ \log(x+y) + \log(x-y) &= \log 40 \end{aligned} \right\}$$

8. Per determinar l'edat d'una roca la ciència actualment ha desenvolupat una tècnica basada en la concentració de material reactiu del seu interior. Quan més jove és la roca, major concentració de material reactiu trobem. La quantitat de material reactiu ve donada per la fórmula :

$$Q = Q_0 \cdot e^{-kt}$$

on,

$Q_0$  és la quantitat de material reactiu en el moment de formar-se la roca  
 $Q$  quantitat de material reactiu final  
 $t$  temps mesurat cada 100 anys

a) Trobeu  $k$  si una roca que inicialment tenia una concentració de 4500 unitats de material reactiu després de 100 anys ( $t = 1$ ) té una concentració de material reactiu de 1500 unitats.

b) Quina concentració de material reactiu tindrà aquesta mateixa roca després de dos segles?

9. Calculeu l'energia alliberada en el terratrèmol de San Francisco l'any 1906, si la seva magnitud va ser de 8,25 en l'escala de Richter.

Recordeu que per a descriure els efectes d'un terratrèmol en l'escala de Richter se li assigna una magnitud  $M$  per la fórmula:

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

On, E: energia alliberada pel terratrèmol (J)  
 $E_0$ : constant  $2,5 \cdot 10^4$  J

10. Fa quatre anys es va repoblar un llac amb una nova espècie de peixos. Llavors es van introduir 100 exemplars d'aquesta nova espècie. Actualment s'estima que hi ha 25000 exemplars. S'estima que el nombre  $N$  de peixos ve donat en funció del temps  $t$  per la  $N = A \cdot e^{B \cdot t}$ , on  $A$  i  $B$  són dues constants. El temps es considera expressat en anys des del moment de la repoblació. Quant temps haurem d'esperar perquè hi hagi 200000 exemplars?
11. Escolliu i raoneu la resposta correcta  
 $x = 2$  és solució de
- $\lg_x 1/8 = -3$
  - $\lg_{3/5} 9/25 = x$
  - de les dues anteriors
  - de cap de les equacions anteriors
12. Sigui  $e^{x-9} = 4$ . Escolliu i raoneu la resposta correcta
- La solució no és un nombre enter
  - Per resoldre l'equació utilitzarem logaritmes decimals a tots dos costats de la igualtat i resoldrem
  - Per resoldre l'equació apliquem logaritmes neperians a tots dos costats de la igualtat i resoldrem
  - Totes les respostes anteriors
- 13.
- Sigui  $a$  un nombre major que 0, l'equació  $a^x = 0$  té solució?. Raoneu la resposta
  - $e^x = 0$  té solució?
14. Sigui  $a$  un nombre major que 0, perquè no existeix  $\log_a$  d'un nombre negatiu o de 0?. Raoneu la resposta.

## Tema: FUNCIONS

1. Feu un mapa conceptual, esquema o resum de la teoria del tema (màxim dos fulls)
2. Trobeu el domini de les següents funcions:

$$a) f(x) = x^4 - 5x + 2$$

$$b) f(x) = \frac{2x+8}{3}$$

$$c) f(x) = \sqrt[4]{x-2}$$

$$d) f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$$

$$e) f(x) = 2^{x-1}$$

$$g) f(x) = e^{\frac{2}{x}}$$

$$h) f(x) = \frac{x^2 + 3}{2x - x^2}$$

$$i) f(x) = \sqrt[4]{\frac{2x+6}{x-4}}$$

$$j) f(x) = \sqrt[3]{\frac{2x+4}{x^2-9}}$$

$$k) f(x) = \sqrt[5]{3x^2 - 2x + 4}$$

$$l) f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$k) f(x) = x \cdot \ln x$$

3. Donades les funcions

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^4 + 3}$$

$$g(x) = 2^x$$

$$h(x) = \log(x^2 - 1)$$

$x = -1$ , raoneu la resposta correcta

- a) no pertany al domini de  $f(x)$  i  $g(x)$
- b) no pertany al domini de  $g(x)$
- c) no pertany al domini de  $h(x)$
- d) no pertany al domini de cap de les funcions

4. Donades les funcions següents estudeu els punts de tall amb els eixos i la simetria.

$$a) f(x) = x^2 - 3$$

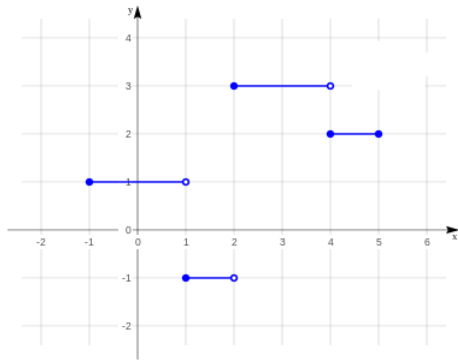
$$c) g(x) = \frac{2x}{x - x^3}$$

$$b) f(x) = \sqrt{x+6}$$

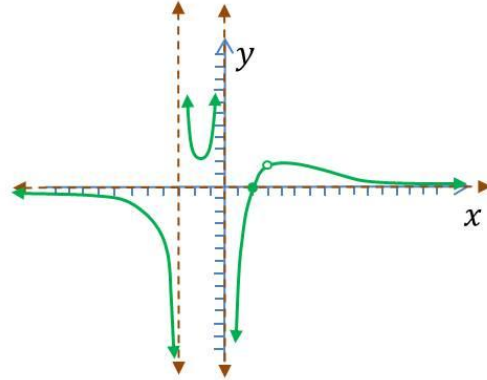
$$d) y = \log x^2$$

5. Estudieu: domini, recorregut, simetria, punts de tall amb els eixos, continuïtat i tipus de discontinuïtat, creixement/decreixement, màxims i mínims, concavitat/convexitat, i punts d'inflexió.

a)



b)



6. Si  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ , i  $g(x) = \frac{x}{x-1}$ . Calculeu:

a)  $(g \circ f)(x)$

c)  $(f \circ f)(x)$

b)  $(f \circ g)(x)$

b)  $(g \circ g)(x)$

7. Trobeu la funció recíproca o inversa de les següents funcions i feu la comprovació

a)  $y = \frac{x}{x-1}$

b)  $y = \frac{2x+1}{2x-1}$

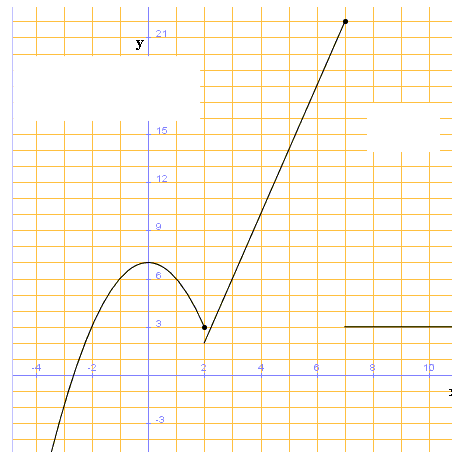
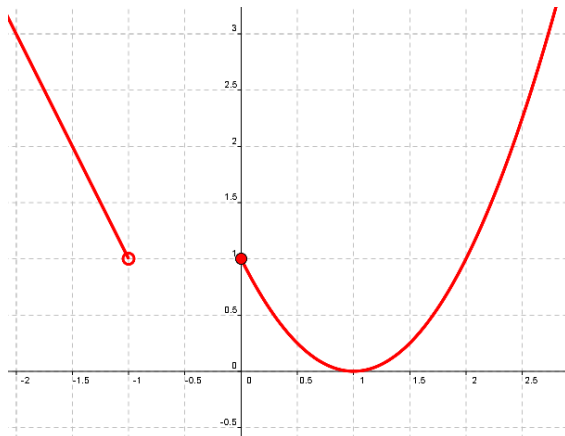
c)  $y = \sqrt{x^2 - 1}$

8. Representeu gràficament les següents funcions definides a trossos. Són contínues? En cas de que no ho siguin indiqueu el punt i el tipus de discontinuïtat.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \leq -3 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -3 < x < 2 \\ 2x - 7 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

9. Trobeu l'expressió analítica de les funcions:



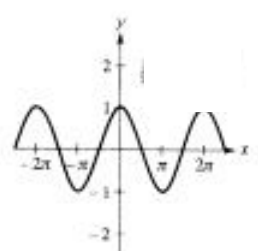
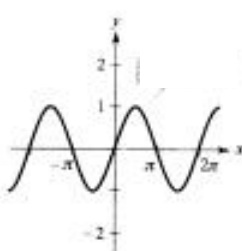
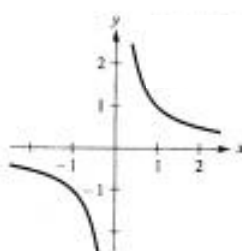
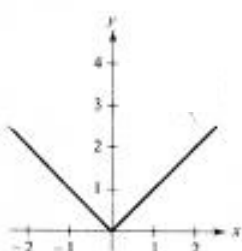
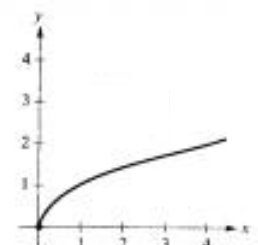
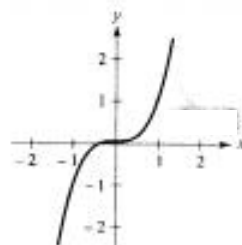
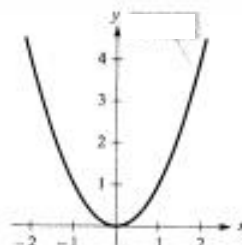
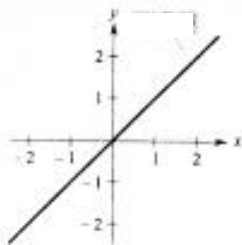
10. Expressen les següents funcions en valor absolut com funcions definides a trossos

a)  $f(x) = |x + 4|$

b)  $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$

c)  $f(x) = 1 - |x - 2|$

11. Indiqueu quin tipus de funció correspon a cada gràfic



12. Sigui una funció polinòmica  $f(x)$ . Raoneu la resposta correcta

- a)  $f(x)$  és continua
- b) el domini de la funció  $|f(x)|$  és  $\mathbb{R}$
- c) talla l'eix y només en un punt
- d) totes les anteriors són correctes

13. Sigui  $R$  el radi normal de la tràquea en cm i  $r$  el radi de la tràquea durant la tos en cm, de forma que  $R$  és una constant i  $r$  és una variable. La velocitat de l'aire, en cm/s, a través de la tràquea depèn de  $r$  segons la funció

$$v(r) = kr^2(R - r)$$

on  $k$  és una constant positiva i  $r$  es troba a l'interval  $[\frac{1}{2}R, R]$ . Trobeu el valor de  $r$  en funció de  $R$  quan la velocitat és màxima.

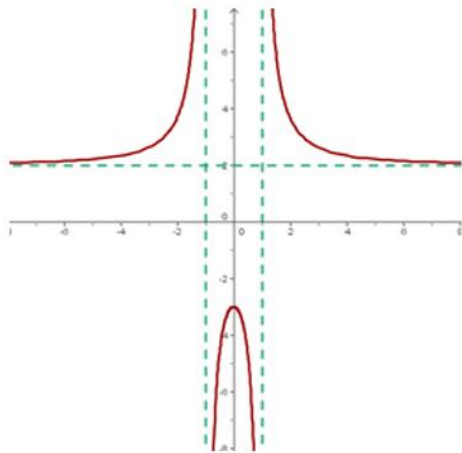


## Tema: LIMIT DE FUNCIONS. CONTINUITAT

1. Feu un resum del tema

2. Observeu els gràfics següents i contesteu:

a)



$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

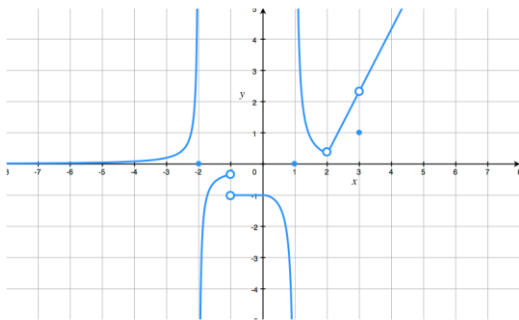
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

b)



$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

Raoneu per quins dels següents valors de x hi ha límit:  $x = -2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$  i  $x = 3$

3. Calculeu els límits:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 2x}{x^4 - 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^5}{3x^2 + 2x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2 + x + x^5}{3x + 2x^5} \right)^{\frac{2}{x}}$

$$\begin{array}{lll} \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^3}{4x + 2x^3} \right)^{x+1} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x^3 - 27} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 2x^3}{x^3 - 4x} \\ \text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 + x}{-x^4 - 1} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4} & \\ \text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x + 4x^3}{3x + x^3} \right)^{\frac{2}{x}} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{2x + x^3} \right)^{x^2+1} & \end{array}$$

4. Determineu els punts de discontinuïtat de les funcions següents i indiqueu de quin tipus són.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 6}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x^3 + 8)}$$

5. Estudieu la continuïtat de les següents funcions definides a trossos, en cas de que no siguin contínues, indiqueu els punts i el tipus de discontinuïtat

a)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 0 \\ 2-x & \text{si } x \in (0,2] \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 9-x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \\ 3x+2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

6. Trobeu  $a$  i  $b$  per tal que la funció sigui continua

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{x^2 + 2}{x+1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

7. Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + b & \text{si } x < 0 \\ a \cdot e^{bx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

on  $a$  i  $b$  són nombres reals. Quina condició ha de complir  $a$  i  $b$  perquè  $f$  sigui continua en tot  $\mathbb{R}$ ?

8. Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + e^{b(x-1)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

on  $a$  i  $b$  són nombres reals. Quina condició ha de complir  $a$  i  $b$  perquè  $f$  sigui continua en tot  $\mathbb{R}$ ?

## Tema: DERIVADES. APLICACIONS DE LES DERIVADES

1. Feu un esquema o resum de la teoria del tema i dels conceptes bàsics
2. Calculeu, mitjançant la definició de derivada, la funció derivada de les funcions següents

a)  $f(x) = x^2 + 3x$

b)  $f(x) = \frac{2-x}{x}$

3. Calculeu les següents derivades i simplifiqueu els resultats:

a)  $y = 3x^2 - \frac{5x}{4}$

b)  $f(x) = (x-2)(x^3 + 4x)$

c)  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$

d)  $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

e)  $f(x) = \cos \left[ \arccos x^3 \right]$

f)  $f(x) = e^{\tan^2(3x)}$

g)  $f(x) = x \cdot \ln x$

h)  $f(x) = (x^2 - 1) \cdot \operatorname{tg} x$

i)  $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 4}$

j)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

k)  $f(x) = \operatorname{cosec} x$

l)  $f(x) = \frac{\ln x}{\sin x} + 3x$

m)  $f(x) = \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}$

4. Calculeu la derivada n-èsima de les següents funcions:

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$

b)  $y = e^{2x}$

5. Trobeu el punt en que la funció  $y = |x - 1|$  no te derivada. Justifiqueu el resultat i representeu la seva gràfica.

6. Trobeu els punts en que la funció  $y = |x^2 - 5x + 6|$  no te derivada. Justifiqueu el resultat i representeu la seva gràfica.

7. Per quins valors de  $a$  la funció és derivable?. Raoneu la resposta.

$$f(x) = \begin{cases} 3-ax & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

8. Estudieu per a quins valors de  $a$  i  $b$  la funció es derivable:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

9. Estudieu per a quins valors de  $a$  i  $b$  la funció es derivable:

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{a}{x} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \frac{x^2 + ax + 1}{x + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

10. Calculeu el punt de la corba  $y = 2 + x - x^2$  en què la tangent és paral·lela a la recta  $y = -x$

11. Trobeu els valors dels coeficients  $b$ ,  $c$  i  $d$  per tal que la gràfica de la funció  $y = x^3 + bx^2 + cx + d$  talli a l'eix  $OY$  en el punt  $(0, -1)$  i passi pel punt  $(2, 3)$  i en aquest punt tingui tangent paral·lela a l'eix  $OX$

12. Trobeu un punt sobre la corba  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 12$  on la recta tangent és paral·lela a l'eix  $OX$ . Indiqueu totes les solucions possibles.

13. Trobeu el punt on l'equació de la recta tangent a la corba  $f(x) = x^3$  forma un angle de  $60^\circ$  amb l'eix d'abscisses

14. Determineu el valor del paràmetre  $b$ , tal que les tangents a la corba de la funció  $f(x) = b^2x^3 + bx^2 + 3x + 9$  en els punts d'abscissa  $x = 1$ ,  $x = 2$  siguin paral·leles.