Tema 4: FUNCIONS

Funció.

S'anomena funció real de variable real a tota aplicació que fa correspondre a cada element d'un conjunt inicial o domini un i només un element d'un conjunt final o recorregut.

Una funció indica una relació de dependència entre dos magnituds numèriques anomenades variables. A cada valor individual de la primera magnitud, *x* o variable independent, s'anomena anti-imatge i a cada valor corresponent de la segona magnitud, *y* o variable dependent, imatge.

$$y = f(x)$$

Ex:

$f(x) = 2x$
$y = 2x$

l'imatge de 2 és 4	$f(2) = 4$
l'anti-imatge de -6 és -3	$f^{-1}(-6) = -3$

• Una funció pot venir definida per:

- un enunciat
- una taula de valors
- un gràfic
- una fórmula

Característiques:

a) Domini
b) Recorregut
c) Punts de tall amb els eixos
d) Simetria
e) Continuïtat
f) Creixement / decreixement
g) Concavitat / convexitat

a) Domini:

- conjunt inicial
- conjunt de valors que pot prendre la *x* (el càlcul de la fórmula és possible o és coherent amb les condicions)

  Ex: " Lloguem un apartament per 500€ mensuals " , el domini serà tots els nombres enters positius

  Ex : f(x) = 2/x, el domini seran tots els nombres reals menys el 0 ja que 2/0 no existeix

Funció	Domini	Hem de ….	Dom f
Polinómica	|R	-	|R
Fracció algebràica	Tots els nombres menys els que facin 0 el denominador ja que |R/0 no existeix	Solucionar l'equació denominador = 0	|R – { solucions de l'equació }
Arrel d'índex parell	Tots els nombres menys els que facin que el radicand sigui negatiu	Solucionar l'inequació radicand ≥ 0	Solucions de l'inequació
Arrel d'índex senar	|R	-	|R

Ex:

$f(x) = x - 1$ funció polinómica

dom f = |R

Ex:

$g(x) = 2 / x + 3$ fracció algebràica

$x + 3 = 0$

$x = -3$

dom g = |R – { - 3 }

Ex:

$y = x - 1$ arrel quadrada

$x - 1 \geq 0$

$x \geq 1$

dom = $[\,1\,,\,+\infty\,)$

Ex:

f(x) = arrel cúbica

dom f = |R

- A nivell gràfic el domini és la projecció de tots els punts del gràfic sobre l'eix x

b) Recorregut

- Conjunt final
- Conjunt de valors que pren la *y* (resultats obtinguts en aplicar la fórmula)

Ex:

$f(x) = x^2 - 2 \quad Im = [-2, +\infty)$

- A nivell gràfic el recorregut és la projecció de tots els punts del gràfic sobre l'eix y

c) Simetria

Algunes funcions presenten simetria

- parella $f(x) = f(-x)$ (respecte l'eix y)
- senar $f(-x) = -f(x)$ (respecte les bisectrius o els eixos)

Ex :

$y = x^4 + 2$

$f(x) = x^4 + 2$
$f(-x) = (-x)^4 + 2 = x^4 + 2$
$-f(x) = -x^4 - 2$

simetria parella

d) Punts de tall amb els eixos

- eix x: y = 0
- eix y: x = 0

Ex:

$$f(x) = \frac{2x+5}{x^2}$$

punts de tall amb l'eix x: y = 0

$$\frac{2x+5}{x^2} = 0$$
$$2x + 5 = 0$$
$$x = \frac{-5}{2} \qquad \left(\frac{-5}{2}, 0\right)$$

punts de tall amb l'eix y: x = 0

$$y = 2 \cdot 0 + \frac{5}{0^2} \qquad y = \frac{5}{0}$$

no hi ha

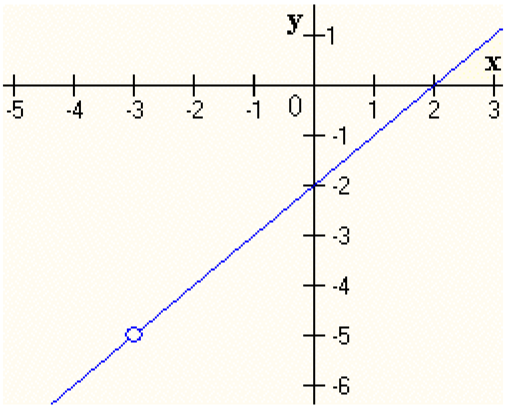
- Com a màxim hi ha un punt de tall amb l'eix y

e) <u>Continuïtat</u>

Es defineix respecte a les x

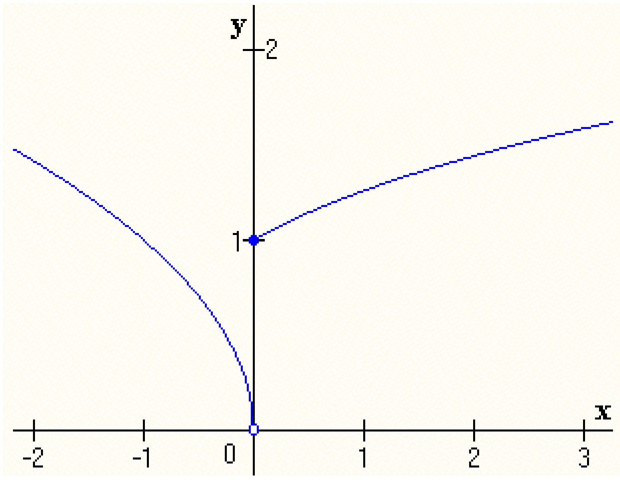
Hi ha diferents tipus de discontinuïtat: evitable, de salt i assimptòtica

Ex:



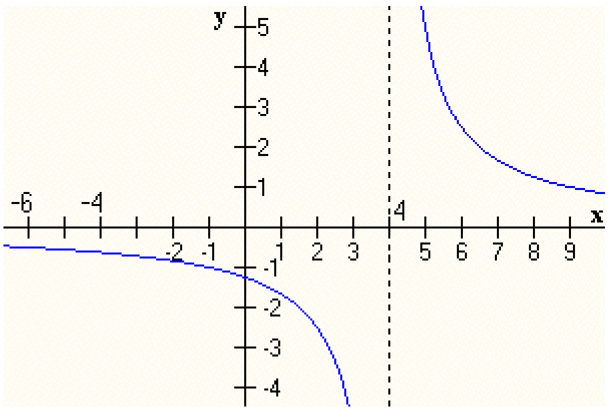
Discontinuïtat evitable (“forat”) en (-3 , 5)

Ex:



Discontinuïtat de salt en x = 0

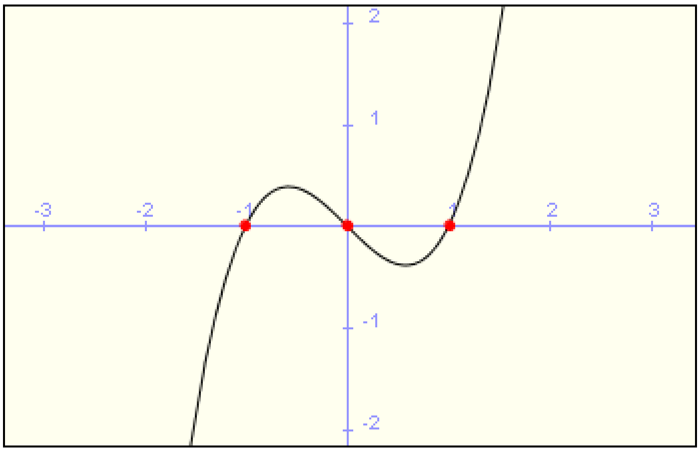
Ex:



Discontinuïtat assimptòtica en x = 4 (assímptota vertical)

f) <u>Creixement / decreixement. Màxim i mínim relatiu</u>
Es defineix respecte a les x

Ex:



Creixent: $(-\infty , \frac{-1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

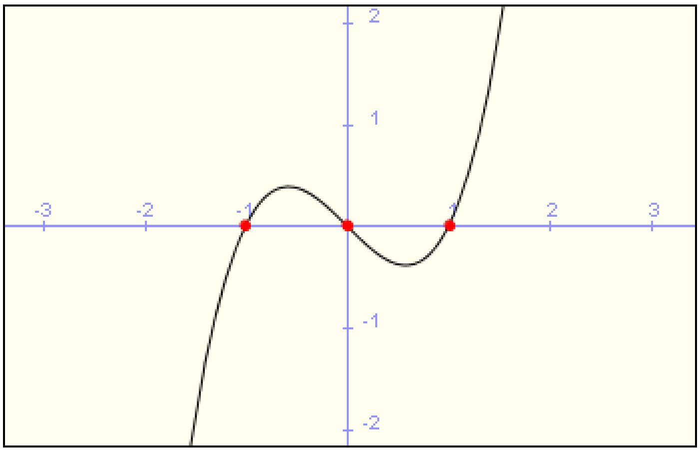
Decreixent: $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$

Màxim relatiu: $(\frac{-1}{2} , \frac{1}{3})$

Mímim relatiu: $(\frac{1}{2}, \frac{-1}{3})$

g) <u>Concavitat / convexitat. Punts d'inflexió</u>
Es defineix respecte les x

Ex:



f(x) és convexa: $(-\infty , 0)$
còncava: $(0 , +\infty)$
punt d'inflexió: $(0 , 0)$

Funcions polinòmiques

Funcions polinòmiques de grau 0

Tipus	Fórmula	Gràfic	Pendent	Punts de tall	Exemple
Constant	y = b	Recta horitzontal	0	(nº , b)	y = 2 recta horitzontal que passa per (0,2) i (1,2)

Funcions polinòmiques de 1r grau

Tipus	Fórmula	Gràfic	Pendent	Punts de tall	Exemple
Afí	y = ax + b	Recta obliqua creixent si a > 0 decreixent si a < 0	a	(0 , b) $(\frac{-b}{a} , 0)$	y = 3x + 2 recta creixent que passa per (0,2) i $(\frac{-2}{3},0)$
Lineal	y = ax			(0 , 0) (1 , a)	y = -x recta decreixent que passa per (0,0) i (1,-1)

• El pendent indica el grau d'inclinació de la recta, quant més gran és el seu valor absolut més vertical és.

Funció polinòmica de 2n grau

Tipus	Fórmula	Gràfic	Vèrtex	Exemple
Completa	$y = ax^2 + bx + c$	Paràbola còncava si a > 0 convexa si a < 0	$(\frac{-b}{2a} , ...)$	$f(x) = x^2 - 2x + 1$ paràbola còncava (a = 1) amb vèrtex a (1 , 0)
Incompleta	$y = ax^2 + bx$ $y = ax^2 + c$			$y = -2x^2 + 5$ paràbola convexa (a = - 2) amb vèrtex a (0, 5)

Funció de proporcionalitat inversa

Fórmula	Gràfic	Exemple
$y = \frac{k}{x}$ amb $k \in \mathbb{R}$	Hipèrbole a 1r i 3r quadrant si k>0 Decreixent a 2n i 4t quadrant si k<0 Creixent	$y = \frac{2}{x}$ hipèrbole decreixent

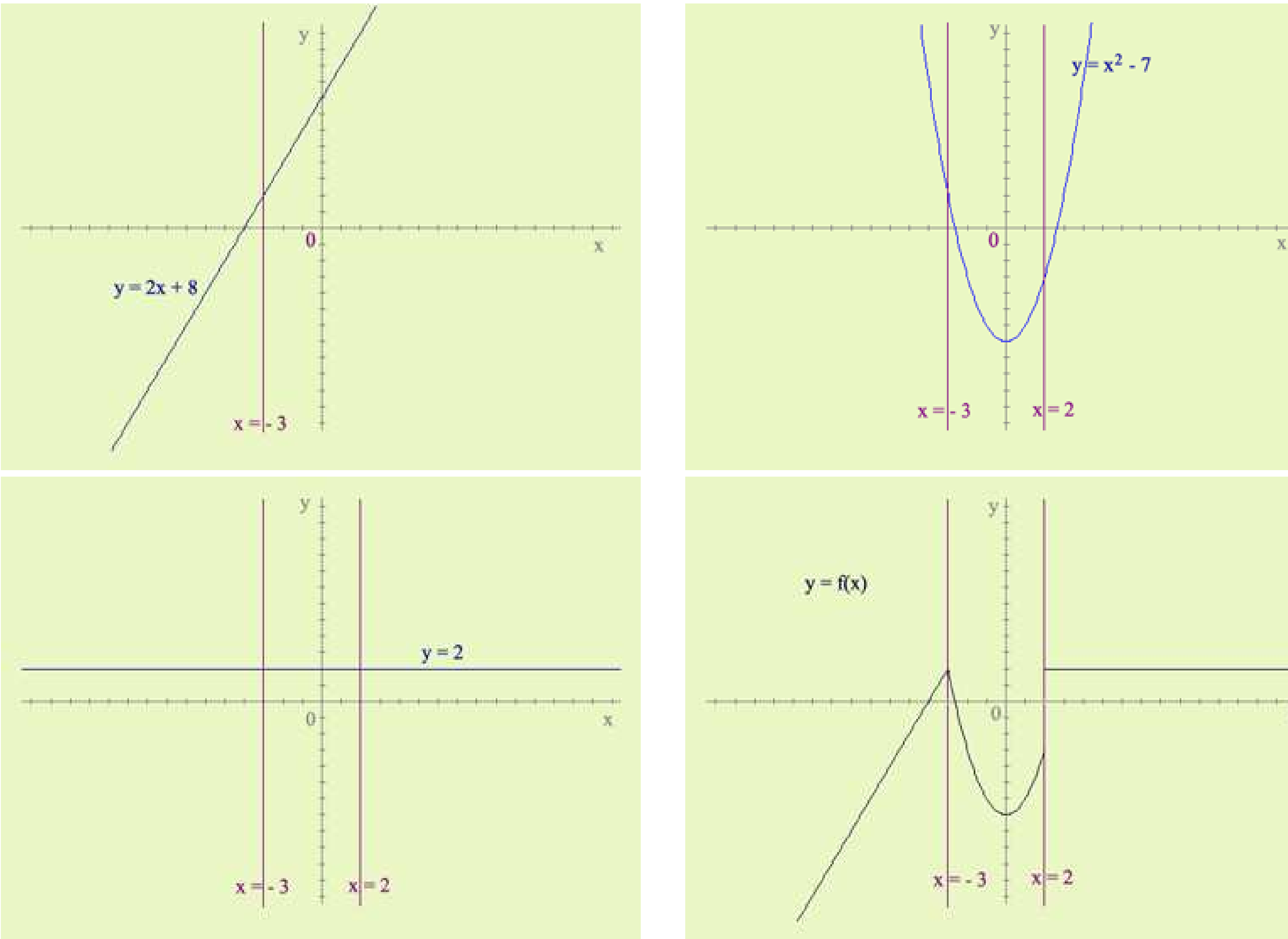
Funcions definides a trossos

Són funcions on la fórmula varia segons els intervals del domini.

Ex:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 8 & \text{si} \quad x < -3 \\ x^2 - 7 & \text{si} \quad -3 \le x \le 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$$

Es tracta de dibuixar cada funció i després mantenir el gràfic en l'interval corresponent



• El domini d'aquestes funcions bé expressat per la unió dels dominis dels diferents trossos.

Funció composta

Donades les funcions *f* i *g*, es defineix la funció composta $g \circ f$ i es llegeix *f* composada amb *g*, com:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

De la mateixa manera es defineix $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$x \xrightarrow{\boxed{f}} f(x) \xrightarrow{\boxed{g}} g(f(x))$$

Ex:

$$f(x) = 5x + 3$$
$$g(x) = x^2 + 2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x+3) = (5x+3)^2 + 2$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+2) = 5 \cdot (x^2+2) + 3$$

• En general, g o f (x) és diferent de f o g (x)

Funció inversa

$$x \underset{\boxed{f^{-1}}}{\overset{}{\rightleftarrows}} f(x)$$

Per trobar la funció inversa s'intercanvia la "x" per la "y"

Ex:

$$f(x) = 4x - 7$$

$$y = 4x - 7 \;\Rightarrow\; y + 7 = 4x \;\Rightarrow\; x = \frac{y+7}{4} \;\Rightarrow\; f^{-1}(x) = \frac{x+7}{4}$$

Observacions:

- Els gràfics de $f^{-1}(x)$ i $f(x)$ són simètrics respecte a la bisectriu del 1r i 3r quadrant
- $f \circ f^{-1} = x$
  $f^{-1} \circ f = x$