

TEMA 5 : Sistemes d'equacions lineals

Equació lineal amb n incògnites

Qualsevol expressió del tipus $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0$ on $a_i \in \mathbb{R}$ és una equació lineal

a_i ($a \neq 0$) – coeficient
 a_0 – terme independent
 x_i – incògnites

- Qualsevol conjunt de n nombres reals que verifica l'equació és solució de l'equació.
Ex: Donada l'equació $x + y + z + t = 0$ són solució (1, -1, 1, -1) i (-2, -2, 0, 4)

Sistemes d'equacions lineals

Conjunt d'expressions algebraiques de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

on x_i son las incògnites, ($i = 1, 2, \dots, n$)

a_{ij} son los coeficients, ($i = 1, 2, \dots, m$) ($j = 1, 2, \dots, n$)

b_i els termes independents ($i = 1, 2, \dots, m$)

$a_{ij}, b_i, m, n \in \mathbb{N}$

- Quan els termes independents són zero s'anomena sistema homogeni
- Solució d'un sistema: conjunt de valors que compleix totes les equacions
- Classificació:
 - a) segons el nombre de solucions
 - compatible: té solució
 - determinat: una única solució
 - indeterminat: moltes solucions
 - incompatible: no té solució
 - b) esglaonats: cada equació té una incògnita menys que l'anterior
 - c) equivalents: tenen la mateixa solució. S'obtenen sistemes equivalents per:
 - eliminació d'equacions linealment dependents:
 - tots els coeficients són zero
 - dues files són iguals
 - una fila és proporcional a altre
 - una fila és combinació lineal d'altres

- transformacions:
 - canviar l'ordre de les equacions del sistema
 - canviar l'ordre de les incògnites de l'equació
 - multiplicar els dos membres de l'equació per un nombre diferent a 0
 - substituir una equació per una combinació lineal d'ella i la resta sempre que el coeficient de l'equació substituïda sigui diferent de 0

Mètode de Gauss

Consisteix en transformar un sistema d'equacions en altre equivalent i esglaonat que ens permetrà solucionar el sistema si és possible. Per facilitar el càlcul es transforma el sistema en una matriu.

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 \dots & \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned}$$

Matriu A del sistema

$$\begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
 \end{pmatrix}$$

Matriu ampliada A* del sistema

$$\begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
 \end{pmatrix}
 \xrightarrow{\text{Gauss}}
 \begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & a_{mn} & b_m
 \end{pmatrix}$$

Ex:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 4z &= 2 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 1 \\ 5 & 3 & 4 & | & 2 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} F_3 \leftrightarrow F_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 5 & 3 & 4 & | & 2 \\ 3 & 2 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 9 & | & -3 \\ 0 & -1 & 4 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow F_2 - 2F_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 9 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x + y - z = 1 & z = 1 \\ -2y + 9z = -3 & \rightarrow y = 6 \\ z = 1 & x = -4 \end{matrix}$$

- Si en fer Gauss s'obté una equació $0 = K$ amb $K \neq 0$ el sistema serà incompatible. Si s'obté $0 = 0$ i el nombre d'incògnites és major al d'equacions serà compatible indeterminat.

Ex: Estudieu si hi ha cap valor de m pel qual el sistema és compatible. Si és així, resoleu el sistema.

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & 1 \\ m & 1 & m-1 & | & m \\ 1 & 1 & 1 & | & m+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 - mF_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & 1 \\ 0 & 1-m^2 & -1 & | & -0 \\ 0 & 1-m & 0 & | & m \end{pmatrix} C_3 \leftrightarrow C_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & | & 1 \\ 0 & -1 & 1-m^2 & | & -0 \\ 0 & 0 & 1-m & | & m \end{pmatrix}$$

Si $1 - m = 0 \rightarrow m = 1 \rightarrow 1 = 0$

Sistema incompatible

Si $1 - m \neq 0 \rightarrow m \neq 1$

Sistema compatible determinat

- Càlcul de la matriu inversa per Gauss
 - Construir una matriu del tipus $(A | I)$
 - Pel mètode de Gauss es transforma la meitat A en la matriu identitat, i la matriu que queda al costat dret és la matriu inversa A^{-1}

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + F_2}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang d'una matriu

Nombre de files o columnes linealment independents, es a dir, que no es pot expressar una d'elles com a combinació lineal de les altres. És el nombre de files de la matriu transformada en sistema triangular diferents de zero.

Podem descartar una línia o columna si:

- tots els seus coeficients són zero
- hi ha dues línies o columnes iguals
- una línia o columna és proporcional a altre
- una línia o columna és combinació lineal de les altres

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Inicialment el rang de la matriu pot ser de 1 a 4, però com

F_3 és nul·la

$F_4 = 2F_2 + F_1$

el rang serà 2.

$$r(A) = 2$$

En general es tracta de fer nul·les el nombre màxim de files o columnes i el rang serà el nombre de files o columnes no nul·les.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Com la segona fila s' anul·la i F_3 i F_4 no són combinació lineal l'una de l'altre, $r(A) = 3$.

Teorema de Rouché-Frobenius

Donat un sistema sigui rang A el rang de la matriu del sistema i rang A* el rang de la matriu associada al sistema

rang A = rang A* = nombre d'incògnites

rang A = rang A* < nombre d'incògnites

rang A < rang A*

S. Compatible determinat

S. Compatible indeterminat

S. Incompatible

Ex:

$$\begin{aligned}x + 3y - z &= 1 \\2x - 5y + 4z &= 7 \\3x - 2y + 3z &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} E_1 \\ E_2 - 2E_1 \\ E_3 - 3E_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 - E_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{rang } A = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{rang } A^* = 3$$

Sistema incompatible

Ex: Discutiu segons el valor del paràmetre λ el següent sistema lineal

$$\begin{aligned}\lambda x + y + z &= 4 \\x + y + 2z &= \lambda \\x - y + \lambda z &= 2\end{aligned}$$

Hem d'intentar que el primer coeficient de la primera equació no sigui el paràmetre

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & \lambda & 2 \end{pmatrix} &\longrightarrow C_1 \text{ per } C_2 \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & \lambda \\ -1 & 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \\
&\longrightarrow \begin{matrix} E_1 \\ E_2 - E_1 \\ E_3 + E_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 & \lambda - 4 \\ 0 & 1 + \lambda & \lambda + 1 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \\
&\longrightarrow \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ (1 + \lambda)E_2 - (1 - \lambda)E_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 & \lambda - 4 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \lambda & \lambda^2 + 3\lambda - 10 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Si $1 - \lambda = 0 \longrightarrow \lambda = 1$ i substituïm al sistema inicial

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{matrix} E_1 \\ E_2 - E_1 \\ E_3 + E_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow F_2 \text{ per } F_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{rang } A &= \text{rang } A^* = \text{nombre d'incògnites} \\
3 &= 3 = 3
\end{aligned}$$

Sistema compatible determinat

Si $\lambda^2 + \lambda = 0 \longrightarrow \lambda = 0 \quad \lambda = -1$

Per $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow C_2 \text{ per } C_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 - E_1 \\ E_3 + E_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 - E_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{rang } A < \text{rang } A^* \\ 2 = 3 \end{array}$$

Sistema incompatibile

Per $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow C_2 \text{ per } C_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 - E_1 \\ E_3 + E_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{rang } A < \text{rang } A^* \\ 2 = 3 \end{array}$$

Sistema incompatibile