TEMA 1 : Aplicacions de les derivades

Problemes de funcions

1. Determineu els coeficients d'un polinomi de tercer grau, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabent que $P(1) = 0$, que $P(0) = -3$, i que la seva gràfica té un màxim en el punt d'abscissa $x = -1/3$ i un mínim en el punt d'abscissa $x = 0$.

2. Determineu els coeficients d'un polinomi de tercer grau, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabent que la seva gràfica té un màxim en el punt d'abscissa $x = -1$, un mínim en el punt d'abscissa $x = 1$ i un punt d'inflexió en $(0,2)$.

3. Calculeu els valors de a, b, i c perquè la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tingui un màxim en $x = 2$, un mínim en $x = -1$ i que passi per $(1,0)$.

4. Busqueu l'equació de la recta tangent a la corba $f(x) = 1 - x + x^2$ en el punt d'abscissa 3.

5. Donada la funció $f(x) = ax^3 - x^2 + bx + c$, trobeu a, b, i c sabent que passa per el punt $(0,5)$ i té extrems relatius en $x = -1$ i $x = 3$.

6. Donada la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, trobeu a, b, c, i d sabent que la funció te un mínim en el punt $(0,4)$ i un màxim en el punt $(2,0)$.

7. Donada la funció $f(x) = ax^3 - 6x^2 + bx + c$, trobeu a, b, i c sabent que la funció te un màxim en $x = -1$ i un punt d'inflexió en $(1,-6)$.

8. En quin punt la tangent a la corba $y = x^2 + 3x + 1$ és paral·lela a la recta $y = 2x$?. Trobeu l'equació d'aquesta recta tangent i de la recta normal en el punt.

9. En quin punt la tangent a la corba $y = (x - 2)^2 + 1$ és horitzontal

10. Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 5b$. Trobeu els valors de a i b de manera que la gràfica de f(x) tingui un extrem relatiu en $x = 1$ i, a més la corba passi pel punt $(-1,-8)$

11. Determineu els coeficients d'un polinomi de tercer grau, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ sabent que en el punt P(1,1) hi ha un punt d'inflexió i que en aquest punt la tangent és horitzontal

12. Donades les rectes $y = 3x + b$ i la paràbola $y = x^2$,

a) Calculeu l'abscissa del punt on la recta tangent a la paràbola és paral·lela a la recta donada .
b) Calculeu el valor del paràmetre b perquè la recta sigui tangent a la paràbola

13. Donades la recta $y = ax$ i la paràbola $y = 3x - x^2$,

    a) Calculeu el valor del paràmetre a perquè siguin tangents
    b) Calculeu els punts de tangència

14. En quin punt la recta tangent a la funció $f(x) = x \cdot e^x$ és paral·lela a l'eix d'abscisses? Escriviu l'equació de la recta tangent en aquest punt.

15. Digueu per a quin valor de x la recta tangent a la corba $y = \ln(x^2 + 1)$ és paral·lela a la recta $y = x$. Escriviu l'equació d'aquesta tangent.

16. Considereu la funció $f(x) = ax^2 + x + b$ $(a, b \in)$. Trobeu els valors de a i b que fan que la recta $y = 2x + 1$ sigui tangent a la gràfica de f quan $x = 1$.

17. Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta r: $y = x + 3$ en el punt d'abscissa $x = -1$, i que en el punt d'abscissa $x = 1$ la recta tangent és paral·lela a la recta r. Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.

Selectivitat Madrid

18. Trobeu el valor dels paràmetres *a, b i c* de forma que la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, té un màxim relatiu en el punt P(1,2) i un punt d'inflexió en $x = 0$

19. Donada la funció: $f(x) = x^2 sinx$:

a) Trobeu l'equació de la recta tangent i normal a la gràfica en el punt d'abscisses $x = \pi$
b) Trobeu els punts de tall amb els eixos en l' interval $[0,2\pi]$

Selectivitat València:

20. Atesa la funció f definida per $f(x) = \text{sen}\, x$, per a qualsevol valor real x, es demana que calculeu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:
a) L'equació de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = \pi/6$.
b) L'equació de la recta normal a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = \pi/3$

21. Sigui f la funció que per a un nombre positiu x està definida per la igualtat $f(x) = 4x \ln x$.

    Obteniu **raonadament**:
    a) El valor de x on la funció f arriba al mínim relatiu.
    b) L'equació de la recta tangent a la corba $y = 4x \ln x$ en el punt (1,0).

22. Donada la funció polinòmica f (x) = $4 – x^2$, es demana obtindre raonadament:

a) El gràfic de la corba $y = 4 - x^2$.
b) El punt P de la corba la tangent de la qual és perpendicular a la recta d'equació $x + y = 0$.
c) Les rectes que passen pel punt (- 2,1) i són tangents a la corba $y = 4 - x^2$, i obtindre els punts de tangència.

23. Es considera la funció real $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, on a, b i c són paràmetres reals.
a) Esbrineu els valors de a i b per als quals les rectes tangents a la gràfica de $f(x)$ en els punts d'abscisses $x = 2$ i $x = 4$ són paral·leles a l'eix OX.
b) Amb els valors de a i b trobats anteriorment, calculeu el valor de c per al qual es compleix que el punt d'inflexió de la gràfica de $f(x)$ està en l'eix OX.

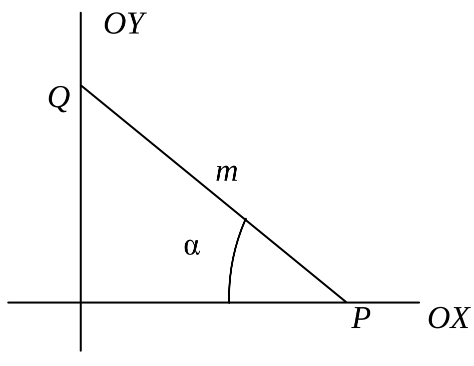
24. Trobeu raonadament els punts de la corba $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en que la corba té pendent màxima, i calculeu el valor d'aquest pendent.

Problemes d'optimització

1. Considereu tots el prismes de base quadrada amb volum V fixat. Anomenen x al costat de la base del prisma i y a la seva altura.

a) Trobeu l'expressió del volum i de l'àrea total del prisma en funció de les variables x i y
b) Comproveu que el que té àrea total mínima és en realitat un cub

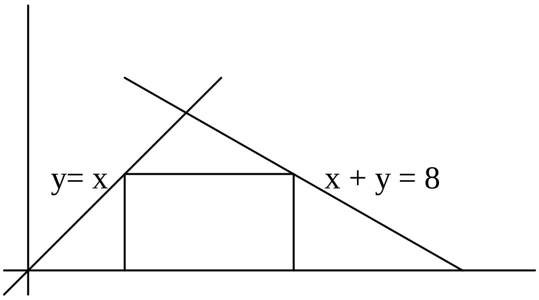
2. Un segment de longitud fixada m recolza sobre els eixos de coordenades. Calculeu el valor del angle α que forma el segment amb l'eix OX perquè el triangle rectangle que forma el segment amb els eixos i del qual m és la hipotenusa tingui àrea màxima. Comproveu que es tracta realment d'un màxim.



3. De tots el cilindres de volum 4π trobeu el de menor àrea total

4. Un triangle equilàter de vèrtex A, B i C té els costats de 8cm. Situem un punt P sobre una de les altures del triangle a una distància x de la base corresponent.
a) Calculeu l'altura del triangle de vèrtex A, B i C
b) Indiqueu la distància del punt P a cadascun dels vèrtex del triangle (en funció de x).
c) Determineu el valor de x perquè la suma dels quadrats de les distàncies del punt P a cadascun dels vèrtex sigui mínima.

5. Un rectangle és inscrit en el triangle que té els costats en les rectes d'equacions $y = x$; $x + y = 8$; $y = 0$ i té un costat sobre la recta $y = 0$. Trobeu-ne els vèrtex perquè la superfície sigui màxima



6. Una fàbrica produeix diàriament x tones d'un producte A i $\frac{(40-5x)}{10-x}$ tones d'un producte B. La quantitat màxima de producte A que es pot produir és 8 tones. El preu de venda del producte A és de 100€ per tona i el del producte B de 250€ per tona.

a) Construïu la funció de la variable x que ens proporciona els ingressos diaris, suposant que es ven tota la producció.
b) Calculeu quantes tones de cada producte s'han de produir diàriament per a obtenir un màxim d'ingressos, i comproveu que és realment un màxim relatiu.

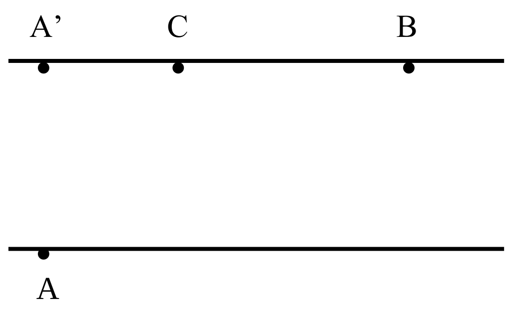
7. El cost d'un marc per una finestra de fusta rectangular és de 100pts per metro d'alçada i 60pts per cada metro d'amplada. Si volem que la finestra tingui 2m2 de superfície. Quines seran les dimensions del marc més econòmic possible?

8. Troba un nombre positiu que sumat amb el seu invers doni una suma mínima.

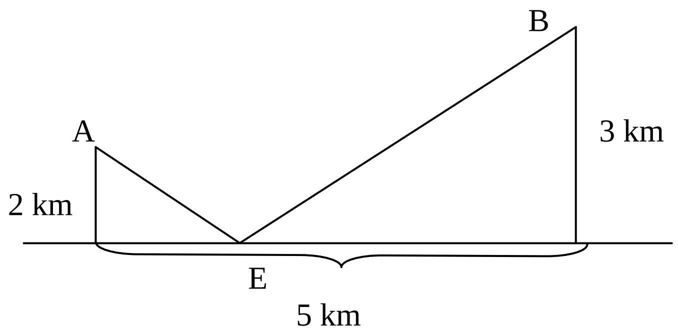
9. Determina quines dimensions ha de tenir un triangle rectangle de 30cm d'hipotenusa perquè la seva àrea sigui màxima.

10. Un granger vol tancar un terreny rectangular de past adjacent a un riu. El terreny ha de tenir 180.000 m^2 per produir suficient forratje per als seus animals. Quines dimensions ha de tenir el terreny rectangular de manera que utilitza la mínima quantitat de tanca, si el costat que dona al riu no necessita ser tancat?.

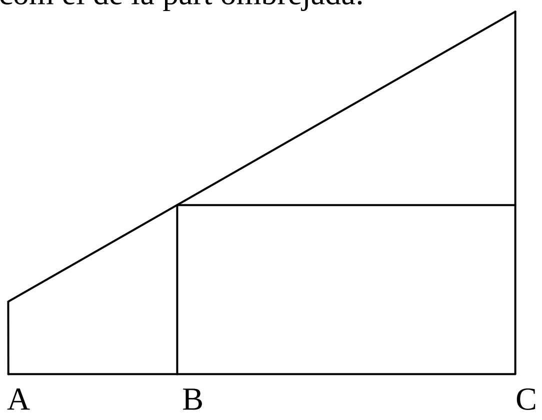
11. Una noia vol travessar el riu Ebre des d'un punt A fins a un punt B, tal com ens indica el dibuix adjunt. Per fer-ho anirà nedant fins a un punt C que encara no sabem quin ha de ser, i des d'aquest anirà corrent fins a B. Podem considerar que en aquesta zona el riu té una amplada constant de 300 metres i que la distància entre A i B mesurada sobre el mateix marge del riu és de 4 quilòmetres (sobre el dibuix, distància entre A' i B). Aquesta noia sap que durant tota l'estona que vagi nedant podrà mantenir una velocitat constant de 6 km/h, i que tota l'estona que vagi corrent podrà mantenir una velocitat constant de 12 km/h. Fins a quin punt C haurà d'anar nedant per tal d'arribar al més ràpidament possible a B?.



12. Una via de tren passa a 2 km del poble A i a 3 km del poble B, de manera que el tram de via comprès entre ambdós pobles és de 5 km, tal com s'indica en la figura. Volem construir una nova estació ferroviària i una carretera formada per dos trams rectes que uneixi A amb B passant per l'estació E. En quin punt del tram de via hem de col·locar l'estació si volem que el recorregut de A a B passant per la nova carretera sigui mínim?. Quina serà la longitud total de la nova carretera?.



13. El croquis del dibuix representa una paret, en la qual es vol construir un armari rectangular, com el de la part ombrejada:



a) Expressa l'àrea del rectangle en funció de AB = x, sabent que la base AC = 6m i l'alçada petita del trapezi val 1m i la gran 3m.
b) Determina les dimensions del rectangle si es vol que tingui una superfície màxima
c) Calcula aquesta superfície màxima

14. Volem construir una piscina la planta de la qual estigui formada per un rectangle i per un semicercle que tingui com a diàmetre un dels costats del rectangle. De totes les piscines d'aquesta forma amb una superfície de 50 m^2, quina és la de perímetre mínim?

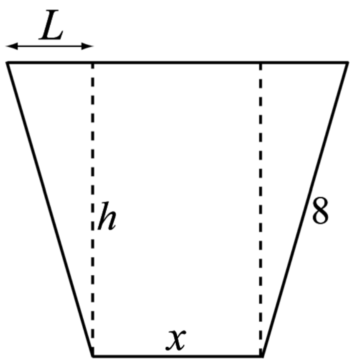
15. Trobeu els punts de la corba $y^2 = 4x$ que distin menys del punt P (4,0).

16. Trobeu el punt de la corba $y = 1/x$ que està més a prop de l'origen de coordenades

17. Un magatzem té forma de prisma recte de base quadrada i un volum de 768 m^3. Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val 100 unitats per m^2, mentre que a través del sostre és de 300 unitats per m^2. La pèrdua pel sòl és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem perquè la pèrdua de calor total sigui mínima.

18. De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 10 cm, trobeu la longitud dels catets del triangle que té el perímetre màxim. Comproveu que la solució trobada correspongui realment al perímetre màxim.

19. Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres.

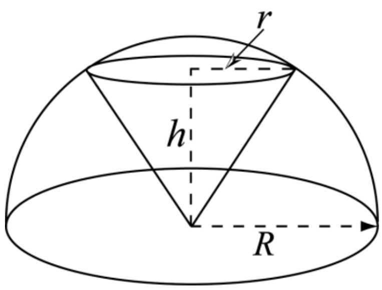


a) Trobeu el valor del segment *L* de la gràfica en funció de la variable *x* (amplària inferior del canal).

b) Sabem que l'àrea d'un trapezi es igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció es donada per $A(x) = \frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4}$

c) Calculeu el valor de *x* perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que es realment un màxim).

20. En una semiesfera de radi *R* inscrivim un con situant el vèrtex al centre de la semiesfera, tal com es veu en el dibuix.

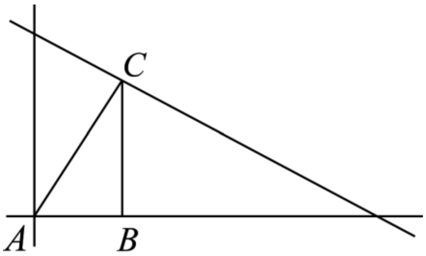


a) Sabent que el volum d'un con es igual a l'àrea de la base multiplicada per l'altura i dividida per 3, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com

b) $V = \frac{\pi \cdot h}{3}(R^2 - h^2)$

c) Trobeu les dimensions d'aquest con (el radi de la base i l'altura) perquè el seu volum sigui màxim i comproveu que es tracta realment d'un màxim

21. Un triangle rectangle situat en el primer quadrant te el vèrtex *A* en l'origen de coordenades, el vèrtex $B = (x, 0)$ en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex *C* pertany a la recta $x + 2y = 8$. L'angle recte es el que correspon al vèrtex *B*.

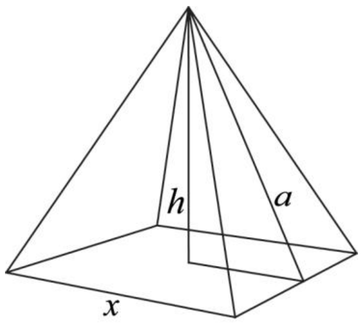


a) Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar de la manera següent:

$$A(x) = 2x - \frac{x^2}{4}$$

b) Trobeu els vèrtexs *B* i *C* perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

22. Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de 300 m^2 de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem *x* la longitud d'un costat de la base de la tenda.



a) Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas,

$$V(x) = \frac{x\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{6}$$

b) Determineu el valor de *x* perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).

Selectivitat València:

23. En el plànol *XY* està dibuixada una parcel·la *A* els límits de la qual són dos carrers d'equacions $x = 0$ i $x = 40$, respectivament, una carretera d'equació $y = 0$, i el tram del curs d'un riu, d'equació $y = f(x) = 30\sqrt{2x+1}$, amb $0 \leq x \leq 40$, sent positiu el signe de l'arrel quadrada.

    Es pretén urbanitzar un rectangle *R* inscrit en la parcel·la *A*, de manera que els vèrtexs de *R* siguin els punts $(x, 0)$, $(x, f(x))$, $(40, f(x))$ i $(40, 0)$.

Calculeu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) L'àrea de la parcel·la *A*.
b) Els vèrtexs del rectangle *R* al qual correspon l'àrea màxima.
c) El valor d'aquesta àrea màxima.

24. Es va estudiar el moviment d'un meteorit del sistema solar durant un mes. Es va obtenir que l'equació de la seua trajectòria *T* és $y^2 = 2x + 9$, sent $-4,5 \leq x \leq 8$ i $y \geq 0$, estant situat el Sol en el punt $(0,0)$.

    Calculeu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La distància del meteorit al Sol des d'un punt *P* de la seua trajectòria l'abscissa del qual és *x*.
b) El punt *P* de la trajectòria *T* on el meteorit aconsegueix la distància mínima al Sol.
c) La distància mínima del meteorit al Sol.

Nota. En els tres resultats només cal donar l'expressió algebraica o el valor numèric obtingut, sense esmentar la unitat de mesura, per no haver sigut indicada en l'enunciat.

25. Es vol construir un depòsit cilíndric de 100 m^3 de capacitat, obert per la part superior. La base és un cercle en posició horitzontal de radi *x* i la paret vertical del depòsit és una superfície cilíndrica perpendicular a la base.
    El preu del material de la base del depòsit és 4 euros/m^2.
    El preu del material de la paret vertical és 2 euros/m^2.

Obteniu **raonadament**:

a) L'àrea de la base en funció del seu radi *x*.
b) L'àrea de la paret vertical del cilindre en funció de *x*.
c) La funció $f(x)$ que dóna el cost del depòsit.
d) El valor *x* del radi de la base per al qual el cost del depòsit és mínim i el valor del dit cost mínim.

26. Per a dissenyar un escut es dibuixa un triangle T de vèrtexs $A = (0, 12)$, $B = (-x, x^2)$ i $C = (x, x^2)$, sent $x^2 < 12$.

Obteniu **raonadament**:

a) L'àrea del triangle T en funció de l'abscissa x del vèrtex C .
b) Las coordenades dels vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle T sigui màxima.

27. Es desitja construir un camp rectangular amb vèrtexs A, B, C i D de manera que:
Els vèrtexs A i B siguin punts de l'arc de la paràbola $y = 4 - x^2$, $-2 \le x \le 2$, i el segment d'extrems A i B és horitzontal.
Els vèrtexs C i D siguin punts de l'arc de la paràbola $y = x^2 - 16$, $-4 \le x \le 4$, i el segment d'extrems C i D és també horitzontal.
Els punts A i C han de tindre la mateixa abscissa, el valor de la qual és el nombre real positiu x.
Els punts B i D han de tindre la mateixa abscissa, el valor de la qual és el nombre real negatiu $-x$.

Es demana obtindre **raonadament**:

a) L'expressió $S(x)$ de l'àrea del camp rectangular en funció del nombre real positiu x .
b) El nombre real positiu x per al qual l'àrea $S(x)$ és màxima.
c) El valor de l'àrea màxima.

28. Dos elements d'un escut són una circumferència i un triangle. La circumferència té centre (0,0) i radi 5($x^2 + y^2 = 25$). Un dels vèrtexs del triangle és el punt $A = (-5, 0)$. Els altres dos vèrtexs del triangle són els punts de la circumferència $B = (x, y)$ i $C = (x, -y)$. Es demana obtindre raonadament:
a) L'àrea del triangle en funció de x.
b) Els vèrtexs B i C per als quals és màxima l'àrea del triangle.
c) El valor màxim de l'àrea del triangle.

29. Es vol construir un estadi tancat de 10.000 metres quadrats de superfície. L'estadi està format per un rectangle de base x i dos semicercles exteriors de diàmetre x , de manera que cada costat horitzontal del rectangle és diàmetre d'un dels semicercles. El preu d'un metre de tanca per als costats verticals del rectangle és d'1 euro i el preu d'un metre de tanca per a les semicircumferències és de 2 euros. Es demana obtindre raonadament:

a) La longitud del perímetre del camp en funció de x .
b) El cost f (x) de la tanca en funció de x .
c) El valor de x per tal que el cost de la tanca sigui mínim.

30. Es desitja construir una bodega amb forma de paral·lelepípede rectangular de $100\ m^3$ de volum de manera que el llarg de la seua base sigui $\frac{3}{4}$ de l'amplada x de la seua base. Se sap que els preus d'un metre quadrat de sòl, de sostre i de paret lateral són, respectivament, 225 €/m^2, 300 €/m^2 i 256 €/m^2. Determinar raonadament:

a) El valor x de l'amplada de la base que minimitza el cost.

b) Aquest cost mínim.

31. Una finestra té forma de trapezi rectangular. La base menor fa 20 cm i el costat obliquo fa 40 cm. Trobeu raonadament l'angle α que ha de formar el costat oblic amb la base major perquè l'àrea de la finestra sigui màxima. Calculeu aquesta àrea màxima.

32. Trobeu les dimensions del cartell d'àrea màxima amb forma de rectangle que té dos vèrtexs subjectes a una estructura rígida parabòlica d'equació $y = 12 - x^2$, i els altres dos vèrtexs estan situats sobre l'eix OX .