

TEMA 0 : Continuitat i derivabilitat

Activitats

1. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 1 \\ -x+3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

3. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 2^{x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

4. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció $f(x) = |x - 3|$

5. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$

6. Trobeu els valors de a i b perquè la funció següent sigui derivable:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x + a & \text{si } x \leq 1 \\ bx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

7. Trobeu els valors de m i n perquè la funció següent sigui derivable:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{m}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ 3x + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

8. Trobeu els valors de a i b perquè la funció següent sigui derivable:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

9. Calculeu el punt per al qual la derivada de la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ val 1

10. Trobeu l'equació de la recta tangent i normal a la corba d'equació $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ en el punt d'abscissa $x = 0$. Determineu els punts on la tangent a la corba és horitzontal.

11. Calculeu l'equació de la recta tangent i normal a la corba $f(x) = x^2$ en el punt d'abscissa 2

12. Trobeu una funció de segon grau sabent que passa per punt $P(1,0)$ i que la pendent de la recta tangent en el punt $Q(2,-1)$ val 0.

13. Trobeu una equació de segon grau tal que $f(0) = 2$, $f'(0) = -4$ i $f''(0) = 6$

14. Trobeu una funció $y = f(x)$ que compleix les següents condicions:

- a) $f'(x) = 3x^2 + 4x + 5$
- b) Passa pel punt $P(-2, 6)$

15. Determineu l'equació de la recta tangent a la paràbola d'equació $y = x^2$ paral·lela a la recta d'equació $y = 4x$.

16. Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $f(x) = x^2 - 3x + 4$ paral·lela a la recta d'equació $3x - y = 2$

17. En quin punt de la corba de la funció $f(x) = x \cdot \ln x - x$, la pendent de la recta tangent val 1.

18. En quins punt la tangent a la corba $f(x) = 6x^3 + 9x^2 - 2$ és paral·lela a l'eix OX.

19. Determineu m de manera que la tangent a la corba $y = -x^2 - (2m + 1)x + m + 2$ en $x = 2$, sigui paral·lela a la recta $3x - y + 2 = 0$.

20. Sigui la funció $f(x) = x^2 + ax + 3$, determineu el valor de a perquè la gràfica de f tingui una tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ paral·lela a la recta $2x + y = 0$.

21. Determineu l'equació de la recta tangent a $f(x) = x^2 + 4x + 1$ que té una inclinació de 30° .

21. Trobeu les equacions de les rectes tangents a la corba $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$, amb pendent 5. Hi ha alguna amb pendent 1? Hi ha cap valor de pendent al qual correspongui una única recta tangent?.
22. Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ paral·lela a la bisectriu del primer quadrant.
23. Considereu la funció $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$. Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica en el punt d'abscissa $x = 0$. Trobeu si hi ha altres punts en els quals el pendent de la tangent sigui igual al que s'ha obtingut.
24. Donades les funcions $f(x) = x^2 - ax - 4$ i $g(x) = \frac{x^2}{2} + b$
- Calculeu a i b de manera que les gràfiques de $f(x)$ i de $g(x)$ siguin tangents en el punt d'abscissa $x = 3$, es a dir, que tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt.
 - Trobeu l'equació d'aquesta recta tangent.
25. Demostreu que la funció $f(x) = x^2 - 4x + 2$ talla al eix d'abscisses en el interval $[0,2]$. Es pot dir el mateix de la funció $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$?
26. Utilitzant el teorema de Bolzano, demostreu que l'equació $x^3 + x - 5 = 0$ té al menys una solució en el interval $[1,2]$, aproximeu aquesta arrel fins la primera xifra decimal.
27. Sigui la funció $f(x) = x^3 - x^2 - x$. Es pot afirmar que existeix al menys un valor c en l'interior del interval $[1,2]$ tal que $f(c) = 0$.
28. Justifiqueu que la funció polinòmica $f(x) = x^3 + x + 1$ té un zero compres entre -1 i 0 .
29. Demostreu que l'equació $e^{-x} + 2 = x$ té al menys una solució real.
30. Demostreu que existeix algun nombre real x tal que $\sin x = x$