

TEMA 1 : Aplicacions de les derivades

Activitats

1. Calculeu els intervals de creixement i decreixement de les funcions següents:

$$a) f(x) = 4 + 15x + 6x^2 - x^3$$

$$d) f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$b) f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 8$$

$$e) f(x) = e^{-(x-1)^2}$$

$$c) f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2}$$

$$f) f(x) = x \cdot \ln x$$

2. Calculeu els màxims i mínims de les funcions següents:

$$a) f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$$

$$c) f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

$$b) f(x) = e^x(2x^2 + x - 8)$$

$$d) f(x) = \sin 2x$$

3. Trobeu els intervals de concavitat i convexitat i les punts d'inflexió de les funcions:

$$a) f(x) = x^3 - 6x^2 + 11$$

$$b) f(x) = x^4 - 6x^2 + 11$$

$$c) f(x) = e^{-x^2}$$

4. Determineu a, b i c per a que la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + cx + d$, tingui un màxim en $x = -4$, i un mínim en $x = 0$ i $f(1) = 1$

5. Determineu a, b i c per a que la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + cx + d$, tingui un màxim en $(0,4)$, i un mínim en $(2,0)$

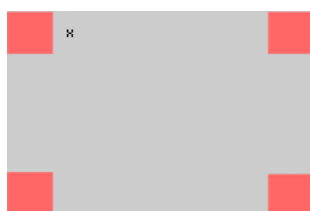
6. Determineu a, b i c, e per a que la funció $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, tingui un punt crític en $(1,3)$ i un punt d'inflexió amb tangent d'equació $y = 2x$ en $(0,0)$

7. La corba $f(x) = x^3 + ax^2 + cx + d$ talla a l'eix d'abscisses en $x = 3$ i té un punt d'inflexió en $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{9}\right)$. Trobeu a, b i c.

8. Donada la funció: $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + ax + c}$, calculeu a, b i c de manera que $f(x)$ tingui en $(2,-1)$ un extrem relatiu i que la corba passi per l'origen de coordenades.

9. Trobeu a i b perquè la funció $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ tingui extrems en els punts $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$. Per aquests valors de a i b, quin tipus d'extrems té la funció en $x = 1$ i $x = 2$

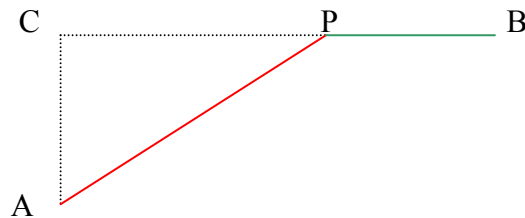
10. Trobeu el triangle isòsceles d'àrea màxima inscrit en un cercle de radi 12cm.
11. Un triangle isòsceles de perímetre 30cm gira sobre la seva altura generant un con. Quin valor hi ha que donar a la base per tal que el volum del con sigui màxima?
12. Es vol fabricar una llauna de conserva cilíndrica (amb tapa) d'1 litre de capacitat. Quines has de ser les seves dimensions per tal d'utilitzar el mínim possible de metall?
13. Descomponeu el nombre 44 en dos sumands tals que el quintuple del quadrat del primer mes el sextuple del quadrat del segon sigui un mínim.
14. Es té un filferro de 1m de longitud i es vol dividir-lo en dos trossos per formar un cercle i un quadrat. Determineu la longitud de cada tros per tal que la suma de les àrees del cercle i el quadrat sigui mínima.
15. Trobeu les dimensions del rectangle més gran inscrit en un triangle isòsceles que te una base de 10cm i una altura de 15cm.
16. Trobeu les dimensions que fan mínim el cost d'un contenidor que té forma de paral·lelepípede rectangular si se sap que el seu volum ha de ser de 9m^3 i una altura de 1m, i el cost de la seva construcció de 50 € per m^2 per a la base i de 60 € per la tapa i 40 € per cada paret lateral.
17. Es retalla cada canto d'una làmina de cartó de dimensions 80cm per 50cm, com s'indica en la figura, per construir una caixa. Calculeu x , per tal que el volum de la caixa sigui màxim.



18. Un full ha de tenir 18cm^2 de text, marges superior i inferior de 2cm d'altura i marges laterals de 1cm d'amplada. Trobeu les dimensions que minimitza la superfície del full.
19. El benefici net mensual, en milions d'euros, d'una empresa que fabrica autobusos ve donat per la funció:

$$B(x) = 1.2x - (0.1x)^3$$
 On x es el nombre d'autobusos fabricats en un mes.
 - a) Calculeu la producció mensual que fa màxim el benefici
 - b) El benefici corresponent a dita producció

20. Un hort té acumulat 25 arbres, que produeixen 600 fruites cadascun. Se calcula que per cada arbre addicional plantat, la producció de cada arbre disminueix en 15 fruites. Calculeu:
- La producció actual del hort
 - La producció que s'obtindria de cada arbre si es planten x arbres més
 - La producció a la que a la qual ascendiria el total del hort si es plantessin x arbres més.
 - Quin ha de ser el nombre total d'arbres que ha de tenir l'hort per tal que la producció sigui màxima?
21. Un sector circular té 10cm de perímetre. Calculeu el radi i l'amplitud del sector de major àrea.
22. De totes les rectes que passen per el punt $P(1,2)$, trobeu la que determina amb els eixos de coordenades i el primer quadrant un triangle d'àrea mínima.
23. Un triangle isòsceles el costat desigual mesura 12cm i l'altura relativa a aquest costat és de 5cm. Trobeu un punt sobre l'altura tal que la suma de les distàncies als tres vèrtex sigui mínima.
24. Donada la funció en l'interval $[1, e]$ per $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, determineu quines de les rectes tangents a la gràfica de $f(x)$ tenen la màxima pendent.
25. Un nedador A, es troba a 3km de la platja en front de la caseta C. Vol anar a B en la platja, a 6 km de la caseta. Sabent que nada a 3km/h i corre per l'arena a 10km/h, trobeu en quin punt ha d'anar nedant per arribar a B en el menor temps possible.



26. Determineu dos nombres reals que sumen N i que el producte sigui màxim.
27. De tots els rectangles de perímetre P determineu les mesures del que tingui àrea màxima.
28. De tots els triangles isòsceles inscrits en una circumferència de radi R , calculeu el de major àrea.
29. De tots els rectangles de perímetre P determineu el que tingui mínima diagonal.
30. De tots els rectangles inscrits en una semicircumferència de radi R determineu el de major àrea. (Un costat està en el diàmetre).
31. De tots els triangles isòsceles circumscrits a un circumferència de radi R determineu el d'àrea mínima.

32. Volem construir un dipòsit de forma cilíndrica el volum del qual sigui $2\pi \text{ m}^3$.
Quines han de ser les seves dimensions perquè la superfície total sigui mínima?

33. Estudi de la funció $f(x) = \frac{x^2}{x+4}$

- Creixement, decreixement, extrems relatius.
- Concavitat, convexitat i punts d'inflexió.
- Asímtotes verticals.
- Comportament de la funció en l'infinit.
- Representació gràfica de la funció.
- Troba la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt $x=-2$

34. Representa gràficament les següents funcions:

| | | |
|---------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ | 2. $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$ | 3. $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$ |
| 4. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ | 5. $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$ | 6. $f(x) = \frac{6}{x} - 3$ |
| 7. $f(x) = \frac{6}{x-3}$ | 8. $f(x) = \frac{6}{x+3}$ | 9. $f(x) = \frac{6}{x-3} + 4$ |
| 10. $f(x) = \frac{3x+9}{x+1}$ | 11. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ | 12. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ |
| 13. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ | 14. $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ | 15. $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ |
| 16. $f(x) = \frac{4x}{x^2+2}$ | 17. $g(x) = \frac{(x+2)^2}{x}$ | 18. $y = f(x) = \frac{x^2+1}{1-x^2}$ |
| 19. $g(x) = 2x\sqrt{x+3}$ | 20. | 14. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ |
| $f(x) = (x-1)e^{-x}$ | $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ | $f(x) = x + \sqrt{x}$ |

