TEMA 1 : Aplicacions de les derivades

1.1. INFORMACIÓ EXTRETA DE LA PRIMERA DERIVADA

1.1.1 Creixement i decreixement de funcions

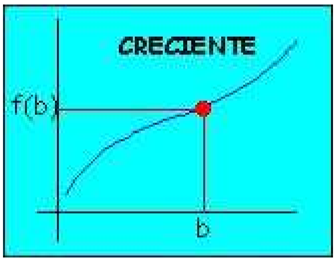
- Definició:

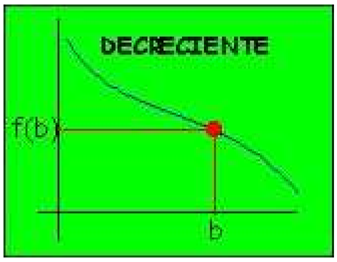
  - f és *creixent* en x_0 ↔ existeix $(x_0 - a, x_0 + a)$, un entorn del punt x_0 tal que:

    si $x_0 - a < x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$
    si $x_0 < x < x_0+a \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

    Es a dir que el $\text{sig}(x - x_0) = \text{sig}(f(x) - f(x_0))$

  - Anàlogament es defineix f és *decreixen*t en x_0





- Relació del creixement d'una funció i la seva derivada:

  f(x) derivable i creixent en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$
  f(x) derivable i decreixent en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

  Demostració:

  Si f és creixent en $x_0 \Rightarrow \text{sig}(x - x_0) = \text{sig}(f(x) - f(x_0)) \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

  Per tant:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

  De manera similar es demostraria: f(x) derivable i decreixent en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

EXEMPLE:

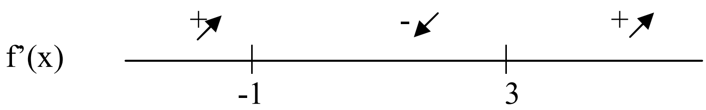
Donada la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ estudia els intervals de creixement i decreixement.

Solució:
Per estudiar el creixement i decreixement de la funció cal veure en quins intervals la derivada de la funció és positiva i en quins és negativa.

Calculem la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ i trobem els valors on s'anul·la:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ i } x = -1$$

Aquets valors divideixen la recta real en tres intervals, estudiem el signe de la derivada en cadascun d'ells:



$f'(-2) = 12 + 12 - 9 > 0$; $f'(0)$ $-9 < 0$ $f'(4) = 48 + 24 - 9 > 0$

Per tant:

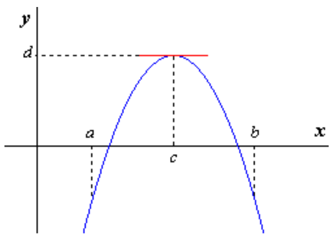
- Si $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \Rightarrow f'(x) \succ 0 \Rightarrow f \uparrow$
- Si $x \in (-1, 3) \Rightarrow f'(x) \prec 0 \Rightarrow f \downarrow$

1.1.1. **<u>Màxims i mínims relatius.</u>**

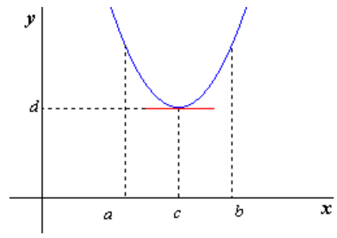
- <u>Definició:</u>

La idea de màxim relatiu (anàlogament per a mínim relatiu) és un punt en que la funció, en aquest punt val més que en els punts que l'envolten.

- Direm que f té un *màxim relatiu* en el punt d'abscissa c $\leftrightarrow$ hi ha un nombre a tal que si $x \in (c-a, c+a) \rightarrow f(x) \prec f(c)$
- Direm que f té un mínim *relatiu* en el punt d'abscissa c $\leftrightarrow$ hi ha un nombre a tal que si $x \in (c-a, c+a) \rightarrow f(x) \succ f(c)$



màxim relatiu



mínim relatiu

- <u>Condició necessària de màxim o mínim relatiu:</u>

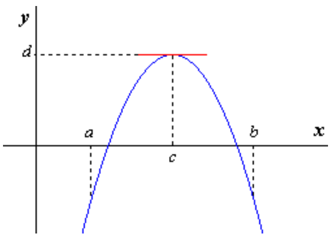
Si fe és derivable en c i té un màxim o mínim relatiu, llavors $f'(c) = 0$

$$\boxed{x = c \text{ màxim o mínim relatiu} \rightarrow f'(c) = 0}$$

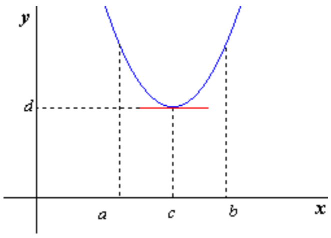
Nota:

Pot passar que f'(c) = 0 i que no hi hagi ni un màxim ni un mínim relatiu.

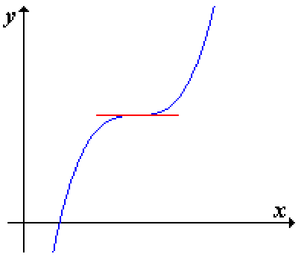
Gràficament:



màxim relatiu



mínim relatiu



Punt d'inflexió

En tots tres casos la recta tangent és horitzontal → pendent de la recta tangent nul·la → f'(c) = 0

Els punts de tangent horitzontal, es a dir aquells on f'(c) = 0 s'anomenen *punts singulars* o *punts crítics* .

- Regla per identificar extrems relatius:

Per saber si un punt singular és un màxim o un mínim relatiu o un punt d'inflexió, estudiarem el signe de la derivada en les proximitats del punt a la seva esquerra i a la seva dreta.

- Si en c f passa de creixent (f' > 0) a decreixent (f' < 0) → en c hi ha un màxim relatiu.
- Si en c f passa de decreixent (f' < 0) a creixent (f' > 0) → en c hi ha un mínim relatiu.
- En cas contrari es tracta d'un punt d'inflexió

EXEMPLES

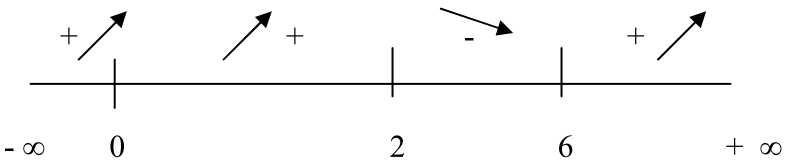
1. Estudieu el creixement i decreixement de la funció $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$, i trobeu els seus extrems relatius:

Dom f = $\Re-\{-2\}$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-2)^2-x^3\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

$$f'(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}=0 \quad\rightarrow\quad x^2(x-2)=0 \quad\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=6\end{cases}$$

Signe f'



- $Si x\in(-\infty,2)\cup(6,+\infty)\rightarrow f'\succ 0\rightarrow$ f és creixent
- $Si x\in(2,6)\rightarrow f'\prec 0\rightarrow$ f és decreixent
- En x = 0 hi ha un mínim relatiu ja que la funció passa de decreixent a creixent.

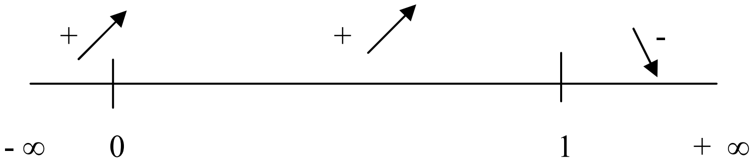
2. Estudieu el creixement i decreixement de la funció $f(x)=-3x^4+4x^3$, i trobeu els seus extrems relatius:

Dom f = $\Re$

$$f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$$

$$f'(x)=0 \quad\rightarrow -12x^2(x-1)=0 \quad\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$$

Signe f'



- $Si\ x\in(-\infty,1)\rightarrow f'\succ 0\rightarrow$ f és creixent
- $Si\ x\in(1,+\infty)\rightarrow f'\prec 0\rightarrow$ f és decreixent
- En el punt P(1,1) hi ha un màxim relatiu ja que la funció passa de creixent a decreixent.

1.2. <u>INFORMACIÓ EXTRETA DE LA SEGONA DERIVADA</u>

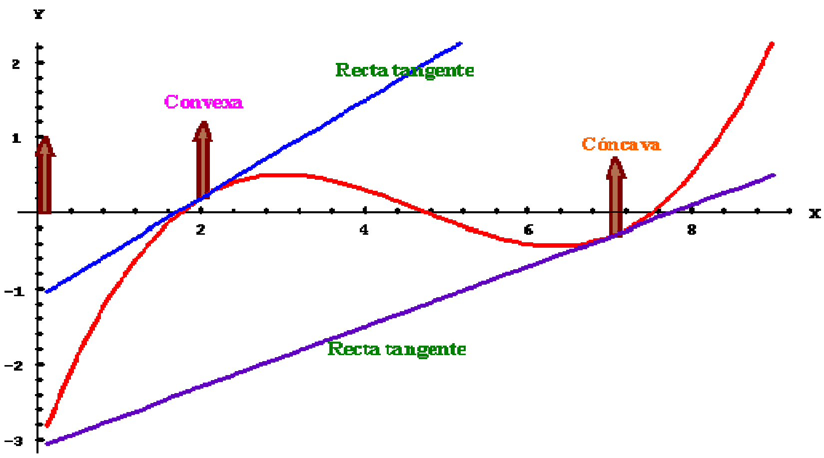
1.2.1. <u>Concavitat i convexitat de funcions. Punts d'inflexió</u>

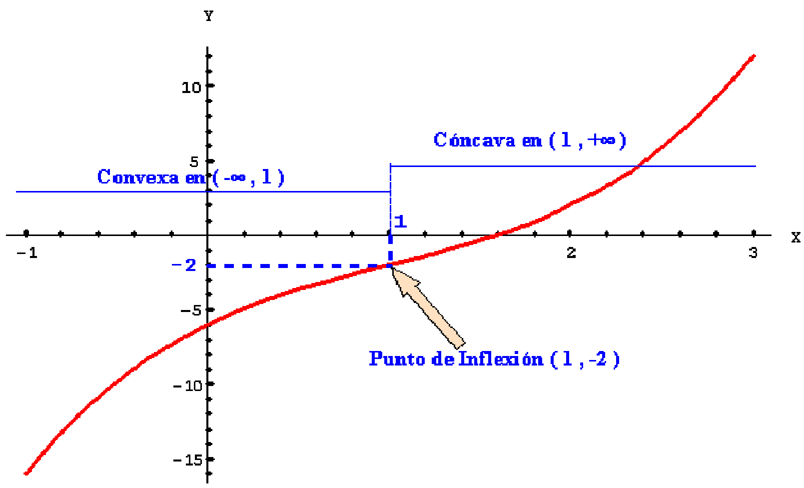
- <u>Definició:</u>

Tenim una funció (corba) f(x). Tracem la recta tangent a aquesta corba en un punt P, l'equació de la qual és t(x). Llavors:

- Si en les proximitats de P f(x) > t(x), la corba és *còncava* en P
- Si en les proximitats de P f(x) < t(x), la corba és *convexa* en P
- Si la recta tangent travessa la corba en P, P és un *punt d'inflexió* (la corba en el punt passa de còncava a convexa o al contrari)

Gràficament:





- <u>Relació de la curvatura d’una funció amb la segona derivada:</u>

Si f té segona derivada en c , es compleix que:

- f és còncava en c $\rightarrow$ f’’(c) ≥ 0
- f és convexa en c $\rightarrow$ f ‘’ (c) ≤ 0
- f té un punt d’inflexió en c $\rightarrow$ f ‘’ (c) = 0

<u>EXEMPLES</u>

1. Estudieu la curvatura de la funció $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 5$

Dom f = $\Re$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2$

$f''(x) = 36x^2 - 48x \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Signe de f’’

	+		-		+	
$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$

- $Si\ x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right) \rightarrow f'' \succ 0 \rightarrow$ f és còncava
- $Si\ x \in \left(0, \frac{4}{3}\right) \rightarrow f'' \prec 0 \rightarrow$ f és convexa
- En els punts P(0,0) i Q($\frac{4}{3}$,) la funció passa de còncava a convexa i de convexa a còncava respectivament $\rightarrow$ P i Q són punts d’inflexió.

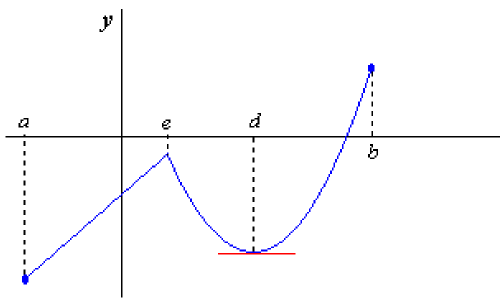
1.3. <u>OPTIMITZACIÓ DE FUNCIONS</u>

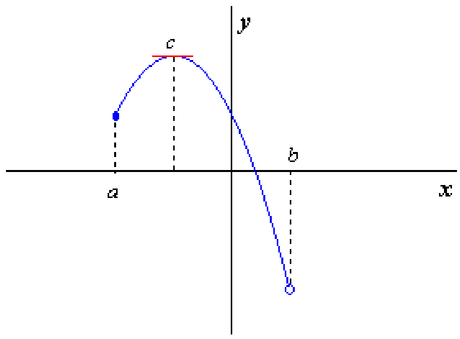
Amb molta freqüència apareixen problemes físics, geomètrics, econòmics, biològics ..., en els quals es tracta d'optimitzar una funció: fer màxim un volum , un benefici, una població, fer mínims uns costos, una àrea...

1.3.1. <u>Càlcul d'extrems d'una funció f(x) en un interval [a,b]</u>

En els problemes d'optimització, el que interessa no són els extrems relatius de la funció si no els absoluts. Vegem algunes regles per obtenir-los.

a) S f(x) és derivable en [a,b] els màxims i mínim absoluts estan entre els punts singulars i els extrem de l' interval.



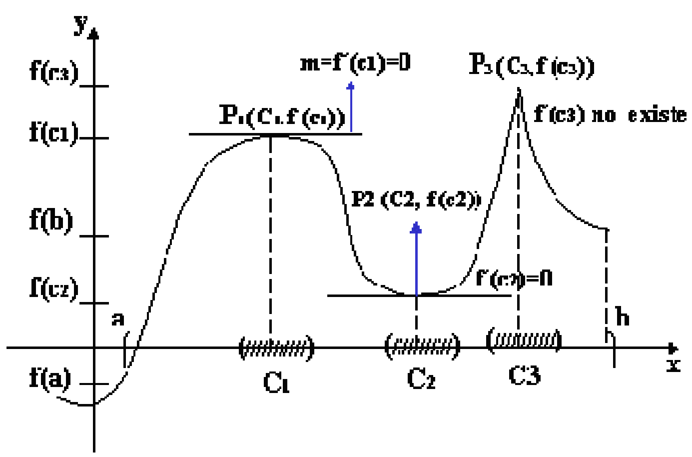


En aquest cas:

- Es troben els extrems relatius (màxims i mínims relatius) x_1, x_2, x_3,..
- Es calcula f(a), f(x_1), f(x_2), ... f(b) i amb aquests valor es veura quin és el màxim absolut (valor més gran) i quin el mínim absolut (valor més petit)

b) Si hi ha algun punt de [a,b] en que la funció no és derivable, encara que sí continua, caldrà mirar també a més a més el valor de la funció en aquest punt.

c) Si f no és continua en algun punt de [a,b] estudiarem el comportament en les proximitats d'aquest punt.



1.4. <u>REPRESENTACIÓ GRÀFICA DE FUNCIONS</u>

Per representar un funció cal seguir els següents passos:

1.4.1. <u>Domini i continuïtat</u>

S'anomena *domini de definició d'una funció* f, i es designa per D(f) o simplement D, al conjunt de valors x per als quals existeix la funció, es a dir, per als quals hi ha f(x).

Raons per els quals el domini de definició pot restringir-se:

a) Context real del qual s'ha extret la funció
Si es parla d'àrea mai la funció mai podrà prendre valors negatius
Si es tracta de l'edat de persones el domini quedarà restringit ([0, 110]

b) Per voluntat de qui ha proposat la funció

c) Impossibilitat de realitzar algunes operacions amb alguns valor de x
- Denominadors que s'anul·len
- Arrels d'índex parell de nombres negatius
- Logaritmes de nombres negatius ....

<u>NOTA</u>
- Si y = polinomi o exponencial $\rightarrow$ D(y) = $\Re$
- Si $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \rightarrow$ D(y) = $\Re$ - {x$\in \Re$ / g(x) = 0}
- Si $y = \sqrt[n]{f(x)}$, n parell $\rightarrow$ D(y) = {x$\in \Re$ / g(x) $\geq$ 0}
- Si y = logf(x) $\rightarrow$ D(y) = {x$\in \Re$ / g(x) > 0}

<u>EXEMPLES</u>

Quin es el domini de definició de les funcions següents:

a) $y = \dfrac{1}{x+3} \rightarrow$ D(y) = $\Re -$ {-3}, ja que el denominador s'anul·la en x = -3

b) $y = \sqrt{x-2} \rightarrow$ x – 2 $\geq$ 0 $\rightarrow$ x $\geq$ 2 $\rightarrow$ D(y) = [2, + ∞]

c) Volum del cub: v = $l^3 \rightarrow$ v $\geq 0 \rightarrow$ l $\geq 0 \rightarrow$ D(v) = [0, + ∞]

d) y = 2x + 5 x $\in$ [1, 4] $\rightarrow$ D(y) = [1, 4], per voluntat de que posa l'enunciat.

El conjunt de valors que pot prendre la funció (variable dependent) s'anomena *recorregut,* i es designa per R(f)

1.4.2. <u>Punts de tall amb els eixos de coordenades</u>

- Si un punt talla a l'eix d'abscisses → y = 0, P(x,0)
- Si un punt talla a l'eix d'ordenades → x = 0, P(0,y)

1.4.3. <u>Simetria i periodicitat</u>

- Direm que una funció és *parell* si és simètrica respecte a l'eix d'ordenades, en aquest cas f(-x) = f(x)
- Direm que una funció és *senar* si és simètrica respecte a l'origen de coordenades, en aquest cas f(-x) = -f(x)
- Una funció es periòdica quan hi ha un tros de la seva gràfica que es repeteix de forma constant. Sinx, cosx, i en general les funcions trigonomètriques ho son.

<u>EXEMPLES</u>

Estudieu la simetria de les següents funcions

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 5$

b) $f(x) = \frac{x^3 - 5x}{x^2 - 4}$

1.4.4. <u>Asímptotes</u>

Les asímptotes són rectes a les quals la funció es va apropant indefinidament sense arribar mai a tallar-les. Hi ha tres tipus d'asímptotes:

➢ <u>Asímptota Vertical:</u>

si $\exists\, k \in R$ / $\lim_{x \to k} f(x) = \pm\infty$ → x = k és una asímptota vertical de la funció

Nota: En el cas de les funcions irracionals les asímptotes verticals hi son en els punts fora del domini.

➢ <u>Asímptota Horitzontals:</u>

si $\exists\, k \in R$ / $\lim_{x \to \infty} f(x) = k$ → y = k és una asímptota horitzontal de la funció.

➢ <u>Asímptota Obliqua:</u>

Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ i $\lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = n$ → la recta d'equació y = mx + n és asímptota obliqua de la funció.

Nota: Si hi ha asímptota horitzontal → No hi ha asímptota obliqua
En el cas de les funcions racionals, hi haurà asímptota obliqua si el numerador te un grau més que el denominador.

EXEMPLE

1. Trobeu les asímptotes verticals i horitzontals de la funció $f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2-1}$

a) Asímptotes verticals

D(f) = |R - $\{\pm 1\}$ → x = 1 i x = -1 AV

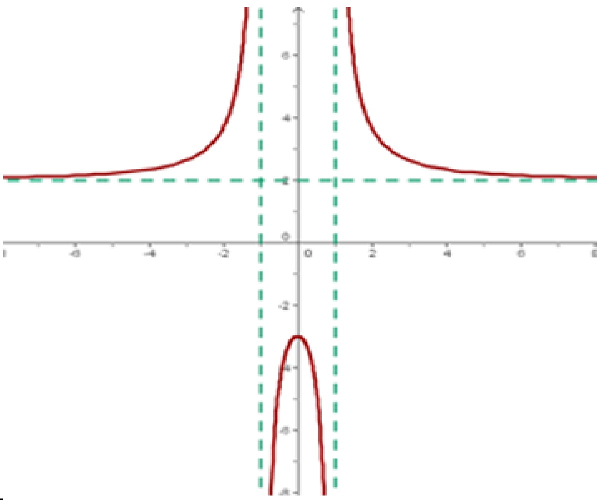
Per a x = -1 $\begin{cases} \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2+3}{x^2-1} = +\infty \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2+3}{x^2-1} = -\infty \end{cases}$

Per a x = 1 $\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2+3}{x^2-1} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2+3}{x^2-1} = +\infty \end{cases}$

b) Asímptotes Horitzontal:

$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{x^2-1} = 2$ → y = 2 hi ha una asímptota horitzontal

Gràficament:

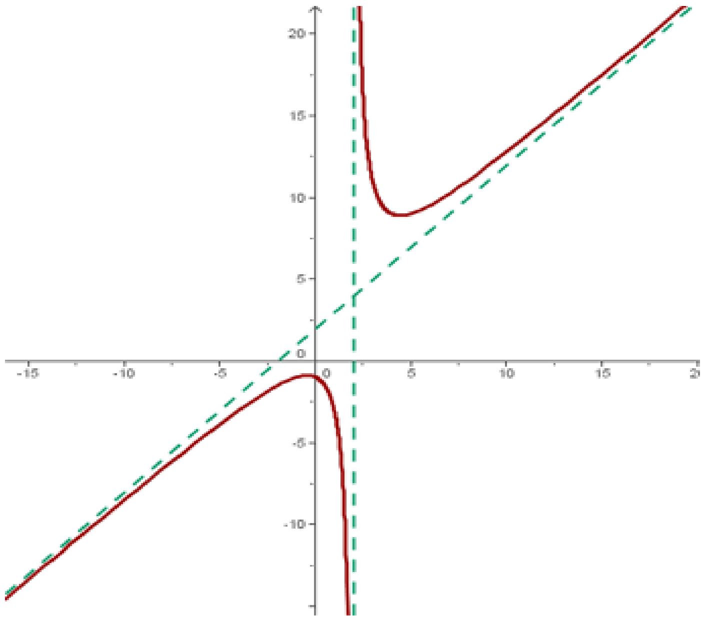


2. Trobeu la asímptotes obliqua de la funció $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2-2x} = 1$$

$$\left[n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2+2}{x-2} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+2x}{x-2} = 2\right]$$

Llavors la recta y = x + 2 és una asímptota obliqua de la funció



1.4.5. <u>Creixement i decreixement. Màxims i Mínims</u>

Teoria en el apartat 1.1 d'aquest tema

1.4.6. <u>Concavitat i convexitat. Punts d'inflexió</u>

Teoria en el apartat 1.2 d'aquest tema

1.4.7. <u>Gràfica</u>

Es tracta de fer una representació gràfica amb tota la informació estreta dels apartats anteriors

<u>EXEMPLE</u>

Representeu gràficament la funció $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$