

TEMA 2 : Càlcul de primitives

Activitats

1. Calculeu les següents integrals

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\int (3x^3 - 5x^2 + 3x + 4)$ | h) $\int \frac{(2x-1)^2}{2x} dx$ | n) $\int \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} dx$ |
| b) $\int (\sin x + 7 \cos x - 1)$ | i) $\int (2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - x^4) dx$ | o) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x} - \sqrt{x+1}} dx$ |
| c) $\int \operatorname{tag}^2 x dx$ | j) $\int \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{3} \right) dx$ | p) $\int \frac{x+2}{2\sqrt{x+2}} dx$ |
| d) $\int (\sqrt{x} - 2) dx$ | k) $\int \frac{2e^x + e^{2x}}{e^x} dx$ | q) $\int 5^x dx$ |
| e) $\int \frac{2}{\sqrt{x}} dx$ | l) $\int \frac{2}{1+x^2} dx$ | r) $\int e^{2x+1} dx$ |
| f) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x} dx$ | m) $\int (4x+2)(x-1) dx$ | s) $\int \cos(ax+b) dx$ |
| g) $\int (4x+3)^2 dx$ | | t) $\int \operatorname{tg} x dx$ |

2. Calculeu les següents integrals

- | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\int x e^x dx$ | f) $\int \sin x \cdot e^x dx$ | k) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$ |
| b) $\int x^2 e^x dx$ | g) $\int (2x+4)e^{2x+4} dx$ | l) $\int x^2 \operatorname{Ln} x dx$ |
| c) $\int x \cos x dx$ | h) $\int \operatorname{arctg} x dx$ | |
| d) $\int \operatorname{Ln} 3x dx$ | i) $\int \operatorname{arcsen} x dx$ | |
| e) $\int (2x-5) \sin x dx$ | j) $\int \frac{x}{e^x} dx$ | |

3. Calculeu les següents integrals

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$ | e) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$ | h) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ |
| b) $\int \frac{1}{x \operatorname{Ln} x} dx$ | f) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ | i) $\int \sin e^{2x} e^{2x} dx$ |
| c) $\int (\cos 2x - \sin 3x) dx$ | g) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2+1} dx$ | j) $\int \frac{4x^3 - 6x^2 + x - 3}{2x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 1} dx$ |
| d) $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx$ | | |

4. Calculeu les següents integrals

a) $\int \frac{2x}{x+1} dx$

d) $\int \frac{x^2-6x+7}{(x+1)(x-2)(x-3)} dx$

b) $\int \frac{3x^2+x+3}{x^2+1} dx$

e) $\int \frac{3x^2-2x+5}{(x+3)^3} dx$

c) $\int \frac{1}{x^2+2x} dx$

f) $\int \frac{x^3+2x^2-2x-5}{x^2+2x-3} dx$

5. Considereu la funció $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Calculeu la primitiva la gràfica de la qual passa pel punt de coordenades (1,1)

6. Considereu la funció $f(x) = \cos x - \cos^2 x$

a) Trobeu l'integral indefinida

b) Quina és la primitiva de $f(x)$ que passa per $(\frac{\pi}{2}, 0)$

7. Esbrineu quina és la funció que compleix:

$$f'(x) = 3x + 1, f'(0) = 3 \text{ i } f(0) = \frac{3}{4}$$

8. Considereu la funció $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$, calculeu la primitiva que s'anul·la en el punt d'abscisses $x = 2$.

9. Trobeu l'expressió general de totes les primitives de $f(x) = 5\sqrt[4]{x^2}$. Quina és la que passa pel punt (8,0).

10. Calculeu raonadament l'expressió d'una funció $f(x)$ tal que $f'(x) = x \cdot e^{-x^2}$ i $f(0) = \frac{1}{2}$

11. Calculeu les següents integrals:

a) $\int 3^x dx$

b) $\int \left(e^x - 5\sin x + \frac{2}{x} \right) dx$

c) $\int \left(3\sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3\sqrt[5]{x^8}} \right) dx$

d) $\int \left(\frac{2}{x} - \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{5}{x^6} \right) dx$

e) $\int \cotan^2 x dx$

f) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

g) $\int \frac{4x^2-8}{x^2+1} dx$

h) $\int (x+1)(x-1)(x+2) dx$

i) $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}} dx$

j) $\int \cotan x dx$

k) $\int \frac{3\ln^5 x}{x} dx$

l) $\int \frac{12}{3-5x} dx$

m) $\int \frac{x^2-12}{x^2+4} dx$

n) $\int \frac{-3x^4}{x^{10}+1} dx$

o) $\int \frac{\cos \ln x}{3x} dx$

p) $\int \frac{3^x}{\sqrt[2]{1-9^x}} dx$

q) $\int x^2 \ln x dx$

r) $\int (3x-5) 2^x dx$

s) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{\ln x}} dx$

t) $\int \frac{\sec^2 e^{-x}}{e^x} dx$

u) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx$

v) $\int \frac{e^{3x}}{4-2e^{3x}} dx$

w) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

x) $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx$

y) $\int \frac{x}{e^x} dx$

z) $\int \frac{1}{x^2+4} dx$

aa) $\int (\sin 2x) e^{3x} dx$

bb) $\int \frac{x^2-12}{x^2+4} dx$

cc) $\int \frac{x}{(x+1)(x-1)} dx$

dd) $\int \frac{e^{2\tan x}}{\cos^2} dx$

ee) $\int \frac{1}{5+x^2} dx$

ff) $\int \frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} dx$

gg) $\int (x^2 - 3x + 5) e^{-x} dx$

hh) $\int 2^{x^2} \sqrt{2^x} dx$

12. L'equació que expressa l'acceleració d'un mòbil en funció del temps és $a(t) = 5(t - 1)$. Sabent que l'acceleració és la derivada de la velocitat respecte del temps i que en el moment inicial la velocitat $v_0 = 5$ m/s responeu:

- a) Quina és l'expressió de la velocitat en funció del temps?
- b) A quina velocitat anirà el mòbil al cap de 15 s? .

13. Esbrineu quina és la funció $f(x)$ que compleix que:

$$f''(x) = \sin x, \quad f'(0) = 2, \quad f(0) = -3 \text{ i } f(\pi) = 5\pi$$

14. Un cos es mou a una velocitat que varia amb el temps segons l'equació $v(t) = 3t^2$. Si sabeu que quan heu començat a estudiar el cos, aquest ja havia recorregut 15 metres, responeu:

- a) Quina és l'equació de l'acceleració en funció del temps?
- b) Quina acceleració tindrà en $t = 2$ s?
- c) Quina és l'equació de l'espai recorregut en funció del temps?
- d) Quin espai haurà recorregut en $t = 10$ s

(indicació: sabem que l'acceleració és la derivada de la velocitat i que la velocitat és la derivada de l'espai recorregut)

15. Se sap que certa funció derivable $F(x)$ verifica les condicions

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad \text{i } F(1) = 3 \quad \text{Trobeu } F(x)$$

16. Sigui f la funció definida per $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-9x^2}}$, trobeu la primitiva $F(x)$ que compleix que $F(0) = 3$

17. Calculeu les següents integrals:

a) $\int_0^1 x^2 e^{-x^3} dx$

g) $\int (2x - 3) \operatorname{tang}(x^2 - 3x) dx$

b) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

h) $\int (x^2 - 1)e^{-x} dx$

c) $\int x \sin x dx$

i) $\int_{-1}^0 \ln(2+x) dx$

d) $\int_1^e x^2 \ln x dx$

j) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{2 - \cos x} dx$

e) $\int \frac{3x+4}{x^2+1} dx$

k) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$

l) $\int \frac{1}{\sqrt{9-(x-1)^2}} dx$

18. Sigui f la funció definida per $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$, trobeu la primitiva $F(x)$ que compleix que $F(1) = \frac{\pi}{3}$

19. Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = (x-1) \cdot e^{2x}$. Calculeu la primitiva de f la gràfica de la qual passa pel punt $(1, e^2)$.

20. De la funció $f: (-1, +\infty)$ se sap que $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ i que $f(2) = 0$. Determineu l'expressió de la funció f

21. Sigui f la funció definida per $f(x) = \frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$, trobeu la primitiva $F(x)$ que compleix que $F(0) = 4$

22. Donada la funció $f(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$, determineu al valor de paràmetre $a > 0$ per al que $\int_0^a f(x) dx = -1$

23. Sigui $f(x)$ una funció derivable en $(0,1)$ i continua en $[0,1]$, tal que $f(1) = 0$, i $\int_0^1 2xf'(x) dx = 1$. Utilitzeu la fórmula de la integració per parts per calcular $\int_0^1 f(x) dx$

24. Donada la funció $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, determineu al valor de paràmetre $a > 0$ per al que $\int_0^a f(x) dx = \frac{1}{4}$