TEMA 2 : Càlcul de primitives

2.1. <u>PRIMITIVES. REGLES BÀSIQUES PER AL SEU CÀLCUL</u>

2.1.1 Definició i nomenclatura.

- F(x) és una *primitiva* de f(x) si F'(x) = f(x). S'expressa:

$$\int f(x)dx = F(x)$$

- Observeu que F(x) + k (k, constant) → $(F(x) + k)' = F'(x) = f(x)$ → $F(x) + k$ també és una primitiva de f(x). Aleshores cada funció te infinites primitives.

$$\int f(x)dx = F(x) + \text{k}, \ \text{k constant}$$

- L'expressió $\int f(x)dx$ s'anomena també *integral indefinida* o simplement *integral de f(x)*. Per això, el càlcul de primitives se'l sol anomenar *càlcul d'integrals o integració.*

<u>EXEMPLES</u>

$$\int 2\text{dx} = 2\text{x} + \text{k}$$

$$\int \text{sinx dx} = -\text{cosx} + \text{k}$$

$$\int \text{x}^2\text{dx} = \frac{\text{x}^3}{3} + \text{k}$$

$$\int \text{cosx dx} = \text{sinx} + \text{k}$$

2.1.2 Propietats.

- $\int [\text{f(x)} + \text{g(x) dx}] = \int \text{f(x)dx} + \int \text{g(x)dx}$
- $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$

2.1.3 Regles bàsiques d'integració.

Funció	Integral	Exemples
Potència		
$\int 1\,dx = x + k$		
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$		
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + k$		
Trigonomètriques		
$\int \mathrm{sinx\,dx} = -\mathrm{cosx} + \mathrm{k}$		
$\int \mathrm{cosx\,dx} = \mathrm{sinx} + \mathrm{k}$		
$\int (1 + \mathrm{tag}^2\mathrm{x})\mathrm{dx} = \int \frac{1}{\cos^2\mathrm{x}}\,\mathrm{dx} = \mathrm{tagx} + \mathrm{k}$		
$\int \frac{1}{1+\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx} = \mathrm{arctagx} + \mathrm{k}$		
$\int \frac{1}{\sqrt[2]{1-\mathrm{x}^2}}\,\mathrm{dx} = \mathrm{arcsinx} + \mathrm{k}$		
$\int \frac{-1}{\sqrt[2]{1-\mathrm{x}^2}}\,\mathrm{dx} = \mathrm{arccosx} + \mathrm{k}$		
Exponencials		
$\int e^x\,dx = e^x + k$		
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{lna} + k$		

EXEMPLES

Calculeu les següents integrals:

a) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{x}^2}}\,\mathrm{dx}$

b) $\int 3x^5\,dx$

c) $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

d) $\int \sqrt{x^3}\,dx$

e) $\int \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{5x}}\,dx$

f) $\int (3x^3 - 5x^2 + 3)\,dx$

g) $\int \frac{(x^3-3x^2+5x+2)}{x-2}\,dx$

h) $\int (3sinx + 2cosx)\,dx$

i) $\int (2^x + 3^x)\,dx$

j) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\,dx$

k) $\int (3cosx - 5e^x)\,dx$

2.1.4 **Integració per parts.**

$$\int u(x) \cdot dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot du(x)$$

De forma abreviada:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Tipus d'integrals que es resolen per parts

$\int x^n \cdot e^x \, dx$	$u(x) = x^n$	$dv(x) = e^x \, dx$
$\int x^n \cdot \sin x \, dx$	$u(x) = x^n$	$dv(x) = \sin x \, dx$
$\int x^n \cdot \cos x \, dx$	$u(x) = x^n$	$dv(x) = \cos x \, dx$
$\int x^n \cdot \ln x \, dx$	$u(x) = \ln x$	$dv(x) = x^n dx$
$\int \mathrm{arctag} x \, dx$	$u(x) = arctagx$	$dv(x) = dx$
$\int \arcsin x \, dx$	$u(x) = arcsinx$	$dv(x) = dx$
$\int \arccos x \, dx$	$u(x) = arccosx$	$dv(x) = dx$
$\int \ln x \, dx$	$u(x) = lnx$	$dv(x) = dx$
$\int \sin x \cdot e^x \, dx$	$u(x) = sinx$ $u(x) = e^x \, dx$	$dv(x) = e^x \, dx$ $dv(x) = \sin x \, dx$
$\int \cos x \cdot e^x \, dx$	$u(x) = cosx$ $u(x) = e^x \, dx$	$dv(x) = e^x \, dx$ $dv(x) = \cos x \, dx$

EXEMPLES

Calculeu les següents integrals:

a) $\int x \cdot e^x \, dx$

b) $\int x^3 \cdot \ln x \, dx$

c) $\int x^2 \cdot \cos x \, dx$

2.1.5 <u>Integració de funcions racionals</u>

En les integrals racionals suposarem que el grau del numerador és menor que el del denominador, si no fos així dividiríem.

$$\int \frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}}\mathrm{dx} = \int \mathrm{C(x)dx} + \int \frac{\mathrm{R(x)}}{\mathrm{Q(x)}}\mathrm{dx}$$

Un cop que el denominador té major grau que el grau del numerador, descomponem el denominador en factors

Depenent de les arrels del denominador ens podem trobar els següents tipus d'integrals racionals:

a) Integrals racionals amb arrels reals simples

La fracció $\frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}}$ pot escriure's : $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-c)} + \cdots$, on a, b, c ...., són les arrels del denominador.

EXEMPLE

Calculeu $\int \frac{3x^3+5x}{x^2-x-2}dx$

- Com que el grau del numerador és major que el del denominador en primer lloc fem la divisió:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 5x & x^2 - x - 2 \\ \hline 14x + 6 & 3x + 3 \end{array}$$

Així, $\int \frac{3x^3+5x}{x^2-x-2}dx = \int \left(3x + 3 + \frac{14x+6}{x^2-x-2}\right)dx$

- Les arrels del denominador $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$ i $x = -1$

En aquest cas: $\frac{14x+6}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$, efectuem la suma per tal de trobar A i B

$$\frac{14x+6}{x^2-x-2} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

Donat que les dues fraccions tenen el mateix denominador, els numeradors han de ser iguals

$$14x + 6 = A(x + 1) + B(x - 2)$$

Calculem els coeficient de A i B donat a la x els valors que anul·len el denominador

Si $x = -1 \rightarrow -8 = -3B \rightarrow B = \frac{8}{3}$

Si $x = 2 \rightarrow 34 = 3A \rightarrow A = \frac{34}{3}$

- Ara ja podem calcular la integral

$$\int \frac{3x^3+5x}{x^2-x-2}dx = \left(\int 3x+3+\frac{14x+6}{x^2-x-2}\right)dx$$
$$= \left(\int 3x+3+\frac{\frac{34}{3}}{x-2}+\frac{\frac{8}{3}}{x+1}\right)dx$$
$$= \frac{3x^2}{2}+3x+\frac{34}{3}\ln(x-2)+\frac{8}{3}\ln(\ x+1)+K$$

b) Integrals racionals amb arrels reals múltiples

En aquest cas escriurem la fracció $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots \frac{A_n}{(x-a)^n}$

EXEMPLE

Calculeu $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x-1}dx$

- Factoritzem el denominador $x^3 - x^2 - x + 1 = (x + 1)(x - 1)^2$

  En aquest cas: $\frac{3x+5}{x^3-x^2-x-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$, efectuem la suma per tal de trobar A ,B i C

$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x-1} = \frac{A(x-1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$,

Donat que les dues fraccions tenen el mateix denominador, els numeradors han de ser iguals

$3x + 5 = A(x - 1)^2 + B(x - 1)(x + 1) + C\ (x + 1)$

Calculem els coeficient de A , B i C donat a la x els valors que anul·len el denominador

Si $x = 1 \rightarrow 8 = 2C$ $\rightarrow C = 4$

Si $x = -1 \rightarrow 2 = 4A$ $\rightarrow A = \frac{1}{2}$

Si $x = 0 \rightarrow 5 = A - B + C$ $\rightarrow B = -\frac{1}{2}$

- Ara ja podem calcular la integral

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x-1}dx = = \left(\int \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(\ x-1) - \frac{4}{x-1} + K$$

c) Integrals racionals amb arrels complexes simples

La fracció $\frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}}$ pot escriure's : $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$

La integral es descompon en una del tipus logarítmica i altra del tipus arctangent

EXEMPLE

Calculeu $\int \frac{2x^2-3x+2}{x^3+x} dx$

- Factoritzem el denominador $x^3 + x = x(x^2 + 1)$

En aquest cas: $\frac{2x^2-3x+2}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$, efectuem la suma per tal de trobar A ,B i C

$\frac{2x^2-3x+2}{x^3+x} = \frac{A(x^2+1)+(Mx+N)x}{x(x^2+1)}$,

Donat que les dues fraccions tenen el mateix denominador, els numeradors han de ser iguals

$$2x^2 - 3x + 2 = A(x^2 + 1) + (Mx + N)x$$

Calculem els coeficient de A , M i N igualant els coeficients

2 = A + M $\rightarrow$ M = 0

-3 = N

2= A

- Ara ja podem calcular la integral

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^3 + x} dx = \left(\int \frac{2}{x} + \frac{-3}{x^2 + 1}\right) dx$$
$$= 2\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x - 1) - 3artgx + K$$