TEMA 3 : La integral definida. Aplicacions

3.1. INTEGRAL DEFINIDA

3.1.1 Aproximació a l'àrea sota una corba

Si considerem l'equació d'una corba corresponent a una funció continua y = f(x), que pren valors no negatius. Es tracta de calcular l'àrea entre la corba, l'eix d'abscisses OX en un interval [a,b].

- Una manera seria dividir l' interval [a,b] en trams i aproximar l'àrea mitjançant rectangles amb base en l'ix OX i altura el mínim valor que pren la funció en cada tram.
-

  Dividim [a,b] en n trossos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < < \ldots\ldots\ldots < x_n = b$$

i anomenem m_i el menor valor que pren la funció en el tram $[x_{i-1}, x_i]$

Llavors:

Aproximació de l'àrea per defecte → $s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$

Aquesta àrea sempre serà menor o igual que l'àrea buscada

- De una forma similar es podria fer una aproximació a l'àrea per excés prenen com altura de cada rectangle el major valor que pren la funció en cada interval

  Dividim [a,b] en n trossos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < < \ldots\ldots\ldots < x_n = b$$

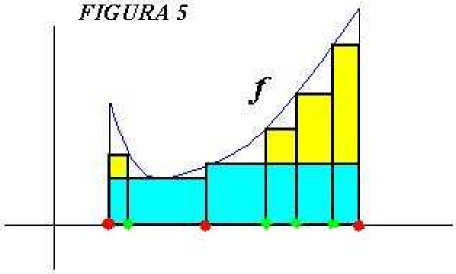
i anomenem M_i el major que pren la funció en el tram $[x_{i-1}, x_i]$

Llavors:

Aproximació de l'àrea per excés → $S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$

Aquesta àrea sempre serà major o igual que l'àrea buscada

FIGURA 5



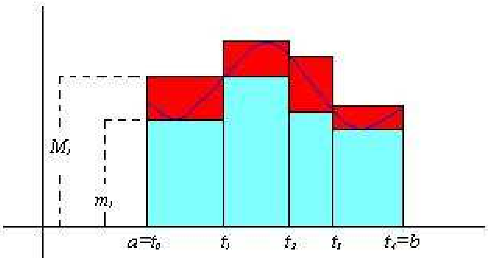
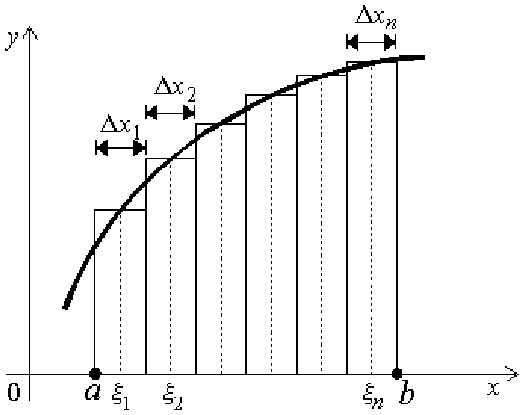
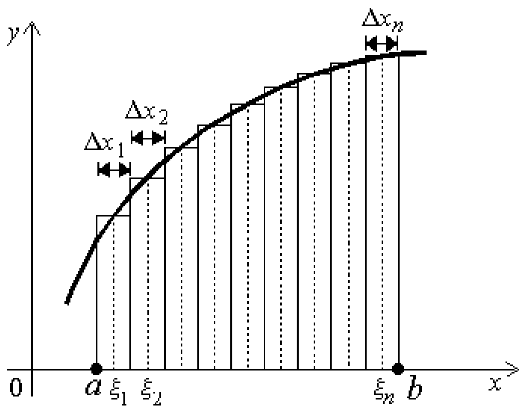


FIGURA 4

Per altra banda és evident que al dividir l' interval en trams cada cop més petits, tant l'àrea per defecte com l'àrea per excés s'aproximen més a l'àrea del recinte.





De manera que:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

L'expressió $\int_a^b f(x)\,dx$ s'anomena *integral definida de f en l' interval [a,b].*

3.1.2 <u>Propietats de l'integral definida</u>

Sigui f(x) una funció continua en l' interval [a,]b

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$ per a qualsevol funció
2. Si f(x) > 0 $\rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$

   Si f(x) < 0 $\rightarrow \int_a^b f(x)dx < 0$
3. Si a < c < b $\rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
4. Si a < c < b $\rightarrow \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
5. $c\int_a^b f(x)dx = \int_a^b cf(x)dx$
6. Si per a cada $\in [a, b]$ f(x) ≤ g(x) $\rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

3.1.3 Regla de Barrow

Si f(x) és contínua en $[a, b]$ i F(x) és una primitiva seva, es compleix que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

EXEMPLES

Calculeu les següents integrals definides:

a) $\int_1^4 (2x^2 - 3x + 5)dx$

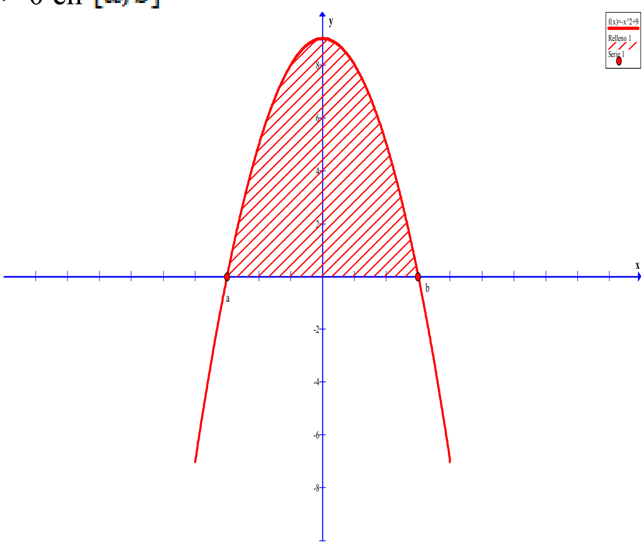
b) $\int_0^{\pi} sinx\ dx$

3.2. CÀLCUL D'ÀREES MITJANÇANT INTEGRLAS

3.2.1 Àrea compresa entre una corba y = f(x) i l'eix d'abscisses OX

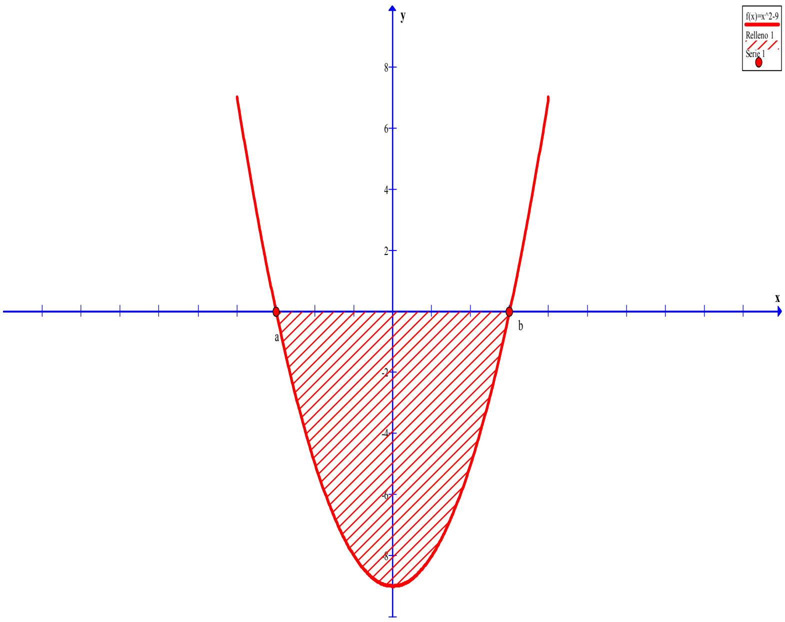
Ens podem trobar tres casos:

a) f(x) > 0 en $[a, b]$



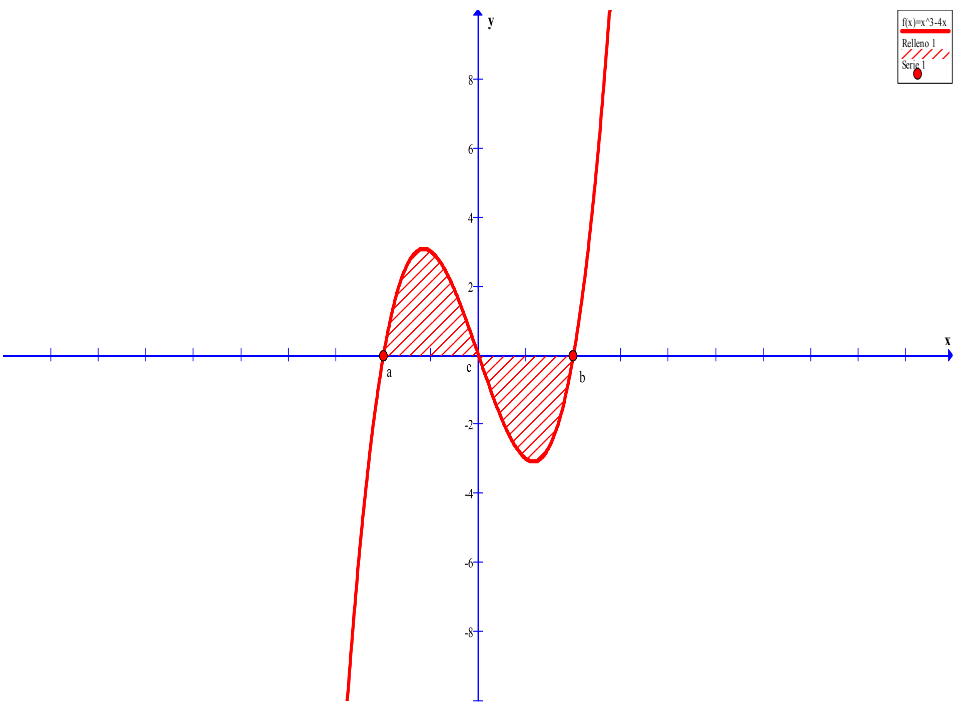
$$\text{Àrea} = \int_a^b f(x)dx$$

b) f(x) < 0 en $[a, b]$



$$\text{Àrea} = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

c)



$$\text{Àrea} = \int_a^c f(x)dx + \left| \int_c^b f(x)dx \right|$$

NOTA

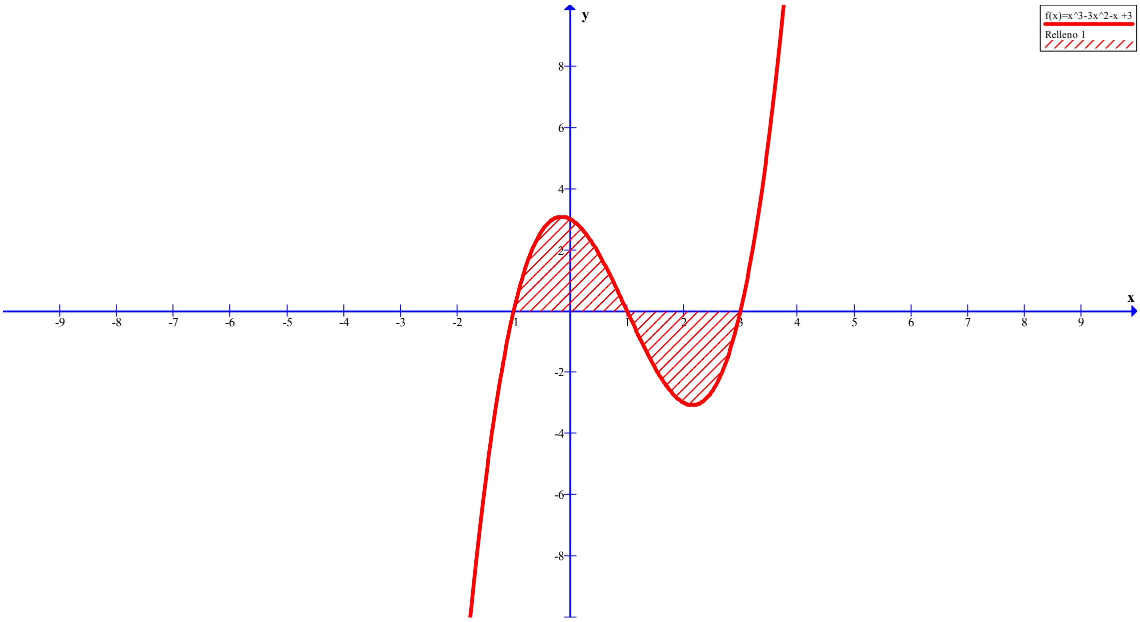
a i b són les arrels de la funció f(x), per tal per trobar el seu valor cal resoldre l'equació f(x) = 0

EXEMPLE

1. Trobeu l'àrea compresa entre la funció $f(x) = (x^2 - 1)(x - 3)$

a) Representació gràfica de la funció
   Punts de tall amb els eixos

   $OX \to y = 0 \to (x^2 - 1)(x - 3) = 0 \to P_1(-1,0);\ P_2(1,0);\ P_3(3,0)$
   $OY \to x = 0 \to P(0,3)$



b) Càlcul de l'àrea

$$\text{Àrea} = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \left|\int_{1}^{3} f(x)dx\right| =$$

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)(x-3)dx + \left|\int_{1}^{3}(x^2-1)(x-3)dx\right| =$$

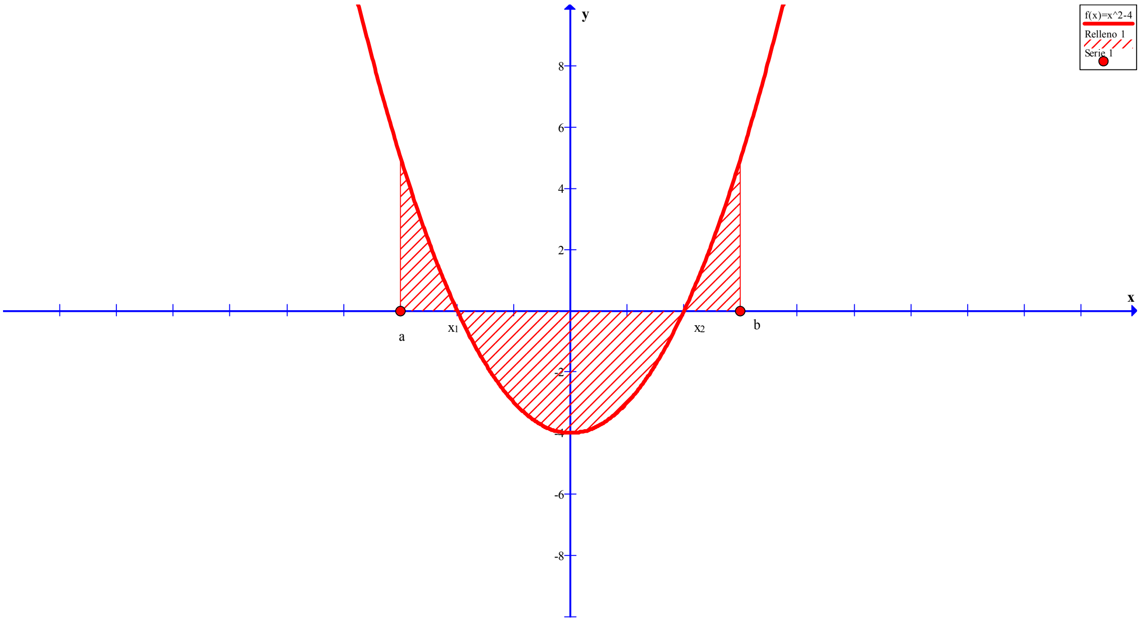
$$\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-x+3)dx + \left|\int_{1}^{3}(x^3-3x^2-x+3)dx\right| =$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{3} =$$

$$\left[\left[\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right] - \left[\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 3\right]\right] + \left|\left[\left[\frac{81}{4} - 27 - \frac{9}{2} + 9\right] - \left[\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right]\right]\right| = 4 + |-4|$$

= 8 unitats quadrades

3.2.2 Àrea compresa entre una corba y = f(x) i l'eix d'abscisses OX i les rectes x = a i x = b



Per calcular l'àrea compresa entre la corba y = f(x), l'eix OX i les rectes x = a i x = b, convé donar els passos següents:

- Representar gràficament la funció
- Resoldre l'equació f(x) = 0 per trobar els punts de tall de la funció amb l'eix OX
- Seleccionar les arrels anteriors que estan entre a i b
- Calcular l'àrea

En el gràfic anterior:

$$\text{Àrea} = \int_a^{x_1} f(x)dx + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \int_{x_2}^{b} f(x)dx$$

EXEMPLE

Calculeu l'àrea compresa entre la funció $f(x) = x^2 - 4$, l'eix OX i les rectes x = -3 i x = 3

3.2.3 Àrea compresa entre dues corbes

Si considerem les funcions f(x) i g(x), es compleix que l'àrea limitada per les dos corbes en l' interval [a, b] es:

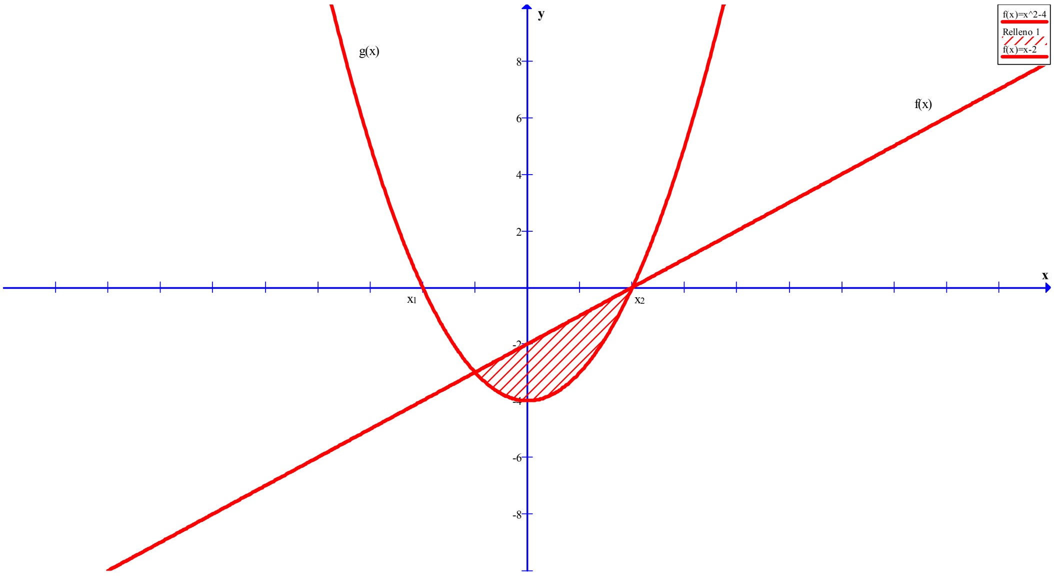
$$\text{Àrea} = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Sempre que f(x) estigui per sobre de g(x) en [a, b]

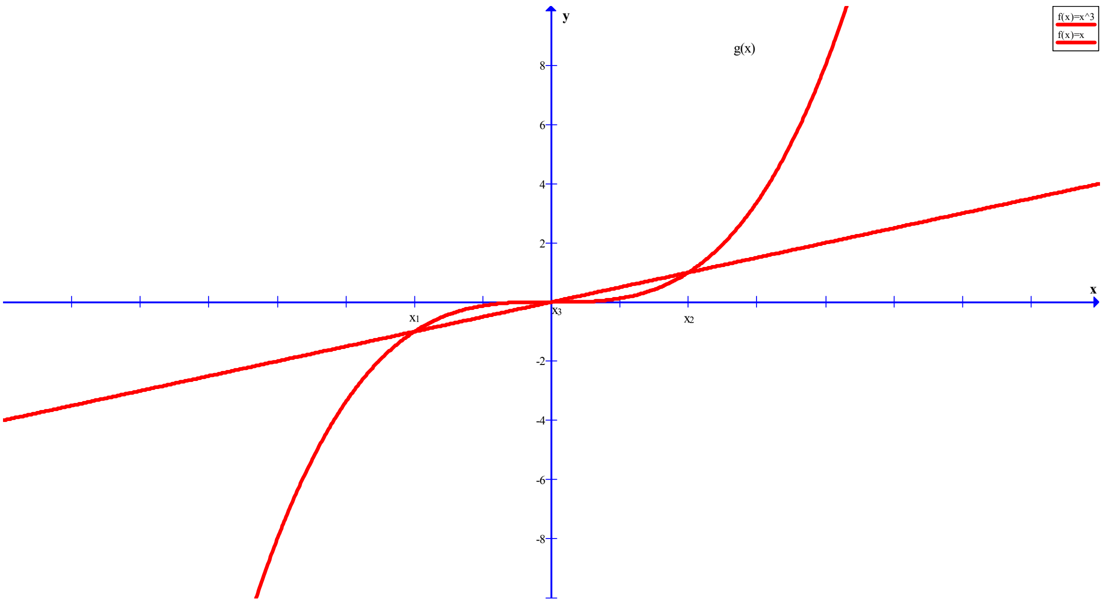
Si les corbes es tallen en l' interval, es subdivideix aquest en altres més petits, i en cadascun des quals s'aplica l'integral anterior, determinat quina corba està per sobre, i se suma el resultat.

Sempre és necessari trobar els punts de tall de entre les corbes, per calcular aquests punts cal resoldre l'equació f(x) = g(x)

Gràficament:



$$\text{Àrea} = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx$$



$$\text{Àrea} = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx + \int_{x_2}^{x_3} (g(x) - f(x))dx$$

NOTA

Per calcular l'àrea compres entre dues corbes convé seguir els següents passos:

- Representar gràficament les funcions
- Trobar els punts de tall de les corbes ($f(x) = g(x)$)
- Calcular l'àrea

EXEMPLE

Calculeu l'àrea compresa entre les corbes $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = 4x - 4$