TEMA 4 : Matrius i Determinants

MATRIUS

4.1. NOMENCLATURA. DEFINICIÓ

- Una matriu és un conjunt de mxn elements distribuïts en m files i n columnes,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \dots a_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & a_{m1} \dots a_{m1} \end{pmatrix}$$

Aquesta és una matriu de m files per n columnes. És de *dimensió* m x n. Els elements a_{ij} són nombres real. La dimensió també rep el nom d'ordre d'una matriu.

En designar una matriu genèrica, com l'anterior, cada terme té dos subíndex que indiquen la fila i la columna a què pertany. Per exemple el terme a_{23} és el que està en la segona fila i tercera columna.

- Dues *matrius* són *iguals* quan són de la mateixa dimensió i, a més coincideixen terme a terme :

$$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ij})_{mxn} \\ \\ B = (b_{ij})_{mxn} \end{array}\right\} A= B \leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

4.2. TIPUS DE MATRIUS

- La *matriu fila* o *vector fila* és una matriu d'ordre 1 x n, es a dir que només te una fila:

  $F= (f_{11},\ f_{12},\ f_{13} \dots\dots\ f_{1n})$

- La *matriu columna* o *vector columna* és una matriu d'ordre m x 1, es a dir que està formada per una sola columna

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix}$$

- S'anomena *transposada* d'una matriu $A = (a_{ij})_{mxn}$ una altra matriu $A^t = (a_{ji})_{nxm}$ que s'obté canviant en A les files per les columnes i les columnes per les files.

- La *matriu oposada* d'una matriu A, que indiquem per –A,és la matriu que te com a elements els oposats de la primera. Dit d'una altra manera, si $A =(a_{ij})_{mxn}$, aleshores $– A = (-a_{ij})_{mxn}$

- La *matriu nul·la* és aquella en la qual tots els elements són zero $N = (0_{ij})_{mxn}$

- Una matriu quadrada és la que té el mateix nombre de files que de columnes, es a dir m = n. En aquest cas l'ordre n x n també s'indica simplement matriu quadrada d'ordre n.

4.3. MATRIUS QUADRADES

En el cas de les matrius quadrades, podem definir més conceptes. Suposem una matriu quadrada d'ordre 4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

- Anomenen *diagonal principal* el conjunt dels elements de la forma a_{ii},

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

- Anomenen *diagonal secundària* als elements:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

- Anomenen traça de A a la suma dels elements que formen la diagonal principal:

$$\text{Traça}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}$$

4.3. 1. Tipus de matrius quadrades

- Una *matriu* és *triangular superior* es està triangularitzada superiorment si tots els elements que hi ha per sota de la diagonal principal són zero

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- Una *matriu* és *triangular inferior* es està *triangularitzada inferiorment* si tots els elements que hi ha per sobre de la diagonal principal són zero

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

- Una *matriu* és *diagona*l si tots els elements fora de la diagonal principal són 0

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

- Un cas especial de les matrius diagonals és la *matriu identitat* en que tots els elements de la diagonal principal són uns

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Una matriu s'anomena A *simètrica* si $A^t = A$. Perquè una matriu sigui simètrica, necessàriament ha de ser quadrada.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & 7 & -9 \\ -4 & 7 & 0 & 6 \\ 2 & -9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

- Una matriu és antisimètrica si $-A^t = A$. Perquè una matriu sigui simètrica, necessàriament ha de ser quadrada.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -7 & 9 \\ -4 & 7 & 0 & 6 \\ 2 & -9 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

4.4. OPERACIONS AMB MATRIUS

4.4.1 Suma (Resta) de matrius

Perquè dues matrius puguin sumar-se (restar-se), es necessàri que tinguin la mateixa dimensió. En aquest cas, es sumen terme a terme:

$$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ij})_{mxn} \\ \\ B = (b_{ij})_{mxn} \end{array}\right\} \quad (A \pm B) = (a_{ij} \pm b_{ij})_{mxn}$$

EXEMPLE

Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 4 & 2 & -8 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -7 & 6 & -8 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

Calculeu

a) A+ B

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & -4+3 & 7+3 \\ 4-7 & 2+6 & -8-8 \\ -3-2 & 5-5 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 10 \\ -3 & 8 & -16 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) A – B

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-4 & -4-3 & 7-3 \\ 4+7 & 2-6 & -8+8 \\ -3+2 & 5+5 & 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 & 4 \\ 11 & -4 & 0 \\ -1 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Propietats

- Propietat commutativa: A + B = B + A
- Propietat associativa: (A + B) + C = A + (B + C)
- Existència de l'element neutre: A + O = A (O representa la matriu nul·la del mateix ordre que A)
- Existència de l'element oposat : A + (- A) = O (- A representa la matriu oposada de A)

4.4.2 Producte d'un nombre per una matrius

Per multiplicar un nombre per una matriu,es multiplica cada terme de la matriu pel nombre.

$$A = (a_{ij})_{mxn} \rightarrow k \cdot A = (k \cdot a_{ij})_{mxn}$$

EXEMPLE

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, calculeu 3·A

$$3\cdot A = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 0 & 3\cdot(-5) \\ 3\cdot(-3) & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -15 \\ -9 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

Propietats

- Propietat commutativa: k·A = A·k
- Propietat associativa: k·(A + B) = k·A + k·B
  (k + l)·A = k·A + l·A

4.4.3 Producte de matrius

Perquè dues matrius A i B puguin multiplicar-se, A·B, és necessari que el nombre de columnes de la primera matriu coincideixi amb el nombre de files de la segona.
En aquesta cas, el producte A·B = C és una altra matriu els elements de la qual s'obtenen multiplicant cada vector fila de la primera per cada vector columna de la segona, de la manera següent:

$$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ij})_{mxn} \\ \\ B = (b_{ij})_{nxp} \end{array}\right\} \quad (A\cdot B) = (c_{ij})_{mxp}$$

Essent c_{ij} el producte de la fila i de A per la columna j de B:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

EXEMPLE

Donades les matrius A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 4 & 2 & -8 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ trobeu:

a) C = A·B

$(A)_{2x3}\cdot(B)_{3x3} = (C)_{2x3} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$

c_{11}= 2·1 + 0·4 + (-5)·(-3) =17

c_{12}= 2·(-4) + 0·2 + (-5)·5 =-33

c_{13}= 2·7 + 0·(-8) + (-5)·2 =4

c_{21}= (-3)·1 + 4·4 + 1·(-3) =10

c_{22}= (-3) ·(-4) + 4·2 + 1·5 =25

c_{23}= (-3) ·7 + 4·(-8) + 1·2 =-51

$$(C)_{2x3} = \begin{pmatrix} 17 & -33 & 4 \\ 10 & 25 & -51 \end{pmatrix}$$

b) C = B·A

$(B)_{3x3}\cdot(A)_{2x3}$ → per tant aquest producte no és possible

Propietats

- No compleix la propietat commutativa: $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Propietat associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- Existència de l'element neutre: En general no es pot afirmar que una matriu tingui element neutre, només es pot assegurar en el cas de les matrius quadrades, i en aquest cas el element neutre es la matriu identitat del mateix orde que la matriu A ($A \cdot I = A$)
- Existència de l'element invers : No podem assegurar que una matriu qualsevol te matriu inversa, de fet nomes existeix en alguns casos de les matrius quadrades. Més endavant explicarem les quines condicions ha de complir una matriu quadrada per tenir inversa i com trobar-la.
- Propietat distributiva del producte respecte de la suma: $(A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$
  $A\cdot(B + C)= A\cdot B + A\cdot C$

DETERMINATS

Donada una matriu quadrada A, existeix un nombre real associat a aquesta matriu anomenat determinat de A i que es designa per det A o | A | .

4.5. CÀLCUL DE DETERMINATS

Si una matriu és quadrada d'ordre 1 A = (a) aleshores:

$$\det A = |A| = |a| = a$$

Si una matriu és quadrada d'ordre 2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aleshores:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d - c\cdot b$$

Si una matriu és quadrada d'ordre 3 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ aleshores:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$a\cdot e\cdot i + d\cdot h.c + b\cdot f\cdot g - c\cdot e\cdot g - f\cdot h\cdot a - b\cdot d\cdot i$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Regla de Sarrus

Per determinar determinants d'una matriu d'ordre superior, hem de veure abans uns conceptes nous:

Donada una matriu $A = (a_{ij})_{mxn}$, anomenem menor associat o menor complementari M_{ij}, d'un element qualsevol a_{ij} el determinant de la matriu d'ordre inferior que resulta d'eliminar de la matriu A la fila i i la columna j.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$m_{ij} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>EXEMPLE</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & \boxed{5} & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Donada una matriu $A = (a_{ij})_{mxn,}$ anomenem adjunt d'un element qualsevol a_{ij} a :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \mathrm{Det} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Donada una matriu $A = (a_{ij})_{mxn}$, s'anomena matriu adjunta i es designa per A*, la que resulta de substituir cada element a_{ij} pel seu asjunt A_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3j} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

4.6. PROPIETATS DE DETERMINATS

1. Si un determinat té una fila o columna formada per zeros el determinat val zero
2. Si un determinat té dues files o dos columnes iguals, el determinat val zero
3. Si un determinat té dues files o dues columnes proporcionals, el determinat val zero
4. Si un determinat té una fila o una columna que és combinació lineal d'altres files o columnes, el determinat és zero
5. Si multipliquem una fila o una columna d'una matriu per un nombre qualsevol, el determinat corresponent queda multiplicat per aquest nombre
6. Si sumem a una fila o columna una combinació lineal d'altres files o columnes, el determinat no varia
7. Si permutem dues files o columnes entre elles, el determinat canvia de signe
8. Donades dues matrius quadrades del mateix ordre A i B → det(A·B) = detA·detB
9. Si canviem files per columnes el determinat no varia→ detA= $\det A^t$
10. $\begin{vmatrix} a+b & c \\ d+e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$

4.7. INVERSA D'UNA MATRIU QUADRADA

Perquè una matriu A tingui inversa A^{-1} ha de complir dues condicions:

- Ser una matriu quadrada
- $\det A \neq 0$

En aquest cas:

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{\det A}$$

EXEMPLE

Calcular la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculem el determinat detA

$$A=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 1\end{vmatrix}=3$$

$\det A \neq 0$

2. Calculem la matriu adjunta A*

$$A^{*}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 5 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ 1 & -3 & -2\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

3. Calculem la transposada de la adjunta $(A^{*})^{t}$

$$(A^{*})^{t}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & -3 & 3\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

4. Calculem la matriu inversa $A^{-1}=\frac{(A^{*})^{t}}{detA}$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & -3 & 3\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & -\frac{2}{3} & 0\end{pmatrix}$$

5. Comprovem que $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$

4.8. <u>RANG D'UNA MATRIU</u>

<u>DEFINICIÓ</u>

El rang d'una matriu és el nombre de files o columnes linealment independents, es a dir que no són combinació lineal de les altres.

CÀLCUL DEL RANG D'UNA MATRIU PEL MÈTODE DE GAUSS

Transformacions elementals:

Són les transformacions que podem realitzar a una matriu i el rang de la matriu no canvia.

1. Si se permuten dues files o dues columnes
2. Si se multiplica o divideix una fila o columna per un nombre no nul
3. Si substituïm una fila o columna per una combinació lineal d'altres files o columnes respectivament.
4. Es pot suprimir files o columnes que siguin nul·les o proporcionals a una altra.

El mètode de Gauss consisteix, en aplicar transformacions elementals a una matriu amb l'objectiu de aconseguir que els elements que hi són per sota de la diagonal principal s'anul·len ($a_{ij} = 0$, i>j). Per a aconseguir triangularitzar la matriu hem de deixar la diagonal principal elements no nuls, sempre i quan la tota una fila sigui nul·la.

Un cop aplicat aquest procés de triangularització, el rang de la matriu es el nombre de files no nul·les de la nova matriu obtinguda.

EXEMPLE

Calculeu el rang de les següents matrius:

a) El rang màxim és 4 ja que hi ha quatre files i quatre columnes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - 3F_1\,;\, F_3 = F_3 - 2F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_4]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - 7F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -25 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rang } A = 3$$

b) El rang màxim és 4 ja que encara que hi ha cinc columnes només hi ha quatre files

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - 2F_1\,;\; F_3 = F_3 - 3F_1\,;\; F_4 = F_4 - 5F_1\,;]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_2\,;\; F_4 = F_4 - 2F_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \qquad \text{rang B} = 2$$