

TEMA 5 : Sistemes d'equacions

Activitats

1. (PAU 2003). Considereu un sistema de dues equacions amb dues incògnites i amb coeficients reals. És possible que el sistema tingui exactament dues solucions?. I exactament tres solucions?. Justifiqueu la resposta.
2. (PAU 2001). Com ha de ser un sistema de tres equacions amb dues incògnites perquè tingui exactament una solució?. Poseu un exemple i trobeu la solució.
3. (PAU 1999). Si el rang d'una matriu d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites és 2 i el de la matriu ampliada és 3, que podeu dir d'aquest sistema? Doneu un exemple de sistema amb aquestes característiques.
4. (PAU 2005). Un sistema conté, entre d'altres aquestes dues equacions:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x + 4y - 6z = -2 \end{array} \right\} \text{Que podeu dir de les solucions?}$$

5. (PAU 2000). Considera el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{array} \right\}$$

- a) Afegiu-hi una equació lineal de manera que el sistema obtingut sigui incompatible
 - b) Afegiu-hi una equació lineal de manera que el sistema obtingut sigui compatible indeterminat. Trobeu-ne la solució.
6. (PAU 2007). Resoleu el sistema d'equacions:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 5z = -1 \\ -3x + y - 2z = 7 \\ 2x - 3y + z = -12 \end{array} \right\}$$

7. (PAU 2005). Resoleu el sistema d'equacions:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{array} \right\}$$

8. (PAU 2004). La matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, un cop reduïda pel mètode de Gauss, és la següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- a) El sistema és compatible o incompatible? Raoneu la resposta.
b) En cas que sigui compatible resoleu-lo.
9. (PAU 2003). Considereu el sistema d'equacions següent, en què a és un paràmetre:

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = a + 1 \\ 2x - y + az = a + 2 \\ x - y + z = 4 \end{array} \right\}$$

Si $x = 1$, $y = -1$ i $z = 2$ n'és una solució, quin és el valor del paràmetre a

10. (PAU 2006). Discutiu en funció del paràmetre a , el sistema següent:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 5 \\ 5x + y - z = 11 \\ 3x - y + az = 2 \end{array} \right\}$$

11. (PAU 2000). Calculeu el valor de a perquè aquests sistema d'equacions lineals sigui incompatible:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + ay = -a + 5 \\ ax + 8y = 2 \end{array} \right\}$$

12. (PAU 2000). Determineu el valor que ha de tenir el paràmetre a perquè el sistema d'equacions format per $3x + y = 5$, $x - 3y = -5$ i $x + ay = a$ tingui solució.
13. (PAU 2006). Esbrineu si el sistema següent pot ser compatible indeterminat per algun valor del paràmetre m :

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{array} \right\}$$

14. (PAU 2003). Per a quin o quins valors del paràmetre λ aquest sistema d'equacions és compatible determinat?

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + (\lambda + 2)z = 0 \\ x + 2\lambda y + 3z = 9 \\ 2x - z = 4 \end{array} \right\}$$

15. (PAU 2000). Se sap que el sistema d'equacions següent té més d'una solució:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - az = -2 \\ 2x + y - 8z = -1 \\ -x - 2y + 10z = 5 \end{array} \right\}$$

Calculeu a i digueu quin és el conjunt de solucions del sistema.

16. (PAU 1999). Considereu el sistema d'equacions lineals següents, en què a és un paràmetre:

$$\left. \begin{array}{l} ax - y = 2 - a \\ 2x - (a + 1)y = 2 \end{array} \right\}$$

- Per a quins valors de a el sistema és compatible determinat.
- Per a quins valors de a el sistema és compatible indeterminat.
- Per a quins valors de a el sistema és incompatible.

17. (PAU 1999). Discutiu, segons els valors del paràmetre a , el sistema següent:

$$\left. \begin{array}{l} ax - y + 2z = 2 - a \\ 2x + 3y - z = -3a \\ x + 2y - z = -2a \end{array} \right\}$$

18. (PAU 1997). Considereu el sistema d'equacions lineals següent, en que m és un paràmetre:

$$\left. \begin{array}{l} mx + y = 0 \\ y - z = 0 \\ -x - z = 0 \end{array} \right\}$$

- Per a quins valors de m el sistema és incompatible
- Per a quins valors és indeterminat?

19. (PAU 1997). Expliqueu què vol dir que un sistema d'equacions lineals sigui compatible i que vol dir que sigui indeterminat. Pot haver-hi sistemes incompatibles i indeterminats alhora?. Digueu, finalment, per a quins valors del paràmetre a el sistema d'equacions següent és indeterminat i per a quins valors és incompatible:

$$\left. \begin{array}{l} a^2x + y = 0 \\ x + 3y + z = a \\ -x + y + z = 1 \end{array} \right\}$$

20. (PAU 2002). Determineu per a quins valors del paràmetre λ el sistema següent és compatible i resoleu-lo:

$$\left. \begin{array}{l} x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \\ 5x - 11y + 9z = \lambda \end{array} \right\}$$

21. (PAU 2006). Discutiu, en funció del paràmetre m , el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + mz = 1 \\ x + y - z = 2 \end{array} \right\}$$

En cas en que sigui possible, doneu també la solució

22. (PAU 2004). En estudiar un sistema lineal dependent del paràmetre k pel mètode de Gauss, hem arribat a la matriu ampliada següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & k-2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array} \right)$$

Discutiu el sistema en funció del paràmetre k .

23. (PAU 2005). Discutiu, en funció del paràmetre a , el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x - ay = 1 \\ ax + y = 3 \end{array} \right\}$$

En cas que sigui possible, doneu-ne també la solució.

24. (PAU 2004). Discutiu i, si s'escau, resoleu aquest sistema segons els valors del paràmetre a .

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 5 \\ x + y = a \\ 3x + 2y = 4 \end{array} \right\}$$

25. Discutiu, en funció del paràmetre m , el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1 \\ (2 - 2m)x + (2m - 2)z = m - 1 \end{array} \right\}$$

En cas que sigui possible, doneu-ne la solució.

26. Discutiu i resoleu si es possible els següents sistemes :

a)

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2y - z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + 2y = 7 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x - 9y + 5z = 33 \\ x + 3y - z = -9 \\ x - y + z = 5 \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ -4x + y - z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} x - y + z + t = 4 \\ 2x + y - 3z + t = 4 \\ x - 2y + 2z - t = 3 \\ x - 3y + 3z - 3t = 2 \end{cases}$$

h)

$$\begin{cases} x + y + 2t = 3 \\ 3x - y + z - t = 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t = a \\ 2x + y + z + t = 2 \end{cases}$$

i)

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 10 \\ 4x - y + z = 4 \\ -2x + y + z = -2 \\ -x - 3y = -11 \end{cases}$$

j)

$$\begin{cases} x + y - z + u + v = 2 \\ x - 2y + u = 5 \\ -x + z + 2v = 3 \\ 3y + z - 2u = -1 \end{cases}$$

27. Discutiu i resoleu quan sigui compatible:

a)

$$\begin{cases} 2x + y + az = 4 \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x - y = 0 \\ 3x + y + bz = 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ kx + z = 0 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + (a+1)y + z = 2a \\ x + y + (1+a)z = 0 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} ax & +z & +t & = & 1 \\ ay & +z & -t & = & 1 \\ ay & +z & -2t & = & 2 \\ & +az & -t & = & 0 \end{cases}$$

28.

Estudieu el següent sistema segons els diferents valors de a i b

$$\begin{cases} (a+1)x & +y & +z & = & 1 \\ x & +(a+1)y & +z & = & b \\ x & +y & +(1+a)z & = & b^2 \end{cases}$$

29. Una empresa té tres mines:

	Níquel (%)	Coure (%)	Ferro (%)
Mina A	1	2	3
Mina B	2	5	7
Mina C	1	3	1

Quantes tones de cada mina hauran de fer servir per tal d'obtenir 7 tones de níquel, 18 de coure i 16 de ferro?.

30. Cada volum de blat que es ven per 4 euros, el de civada per 2 euros i el de mijo per 0.5 euros. Si es venen 100 volums en total i s'obté per la venda 100 euros, Quants volums de cada espècie es venen?.

31. (PAU 2005). De tres nombres, x, y i z, sabem el següent: el primer més el segon sumen 0; el primer més el tercer sumen 1; la suma dels tots tres és zero, i el producte del primer per un nombre k més el doble de la suma del segon i el tercer dóna 1.

- Què podeu dir del paràmetre k?
- Quant valen els tres nombres?

32. **(PAU 2007)**. Tres entitats financeres, A, B i C, ofereixen per a dipòsits superiors a 2000 € i un interès anual del 2 %, el 3% i k% respectivament. La Joana, en Martí i en Dani decideixen invertir els estalvis en aquesta entitat durant un any. Si tots ho fessin en l'entitat A, obtindrien en total uns beneficis de 164 €; si la Joana optés per A, en Martí per C i en Dani per B, obtindrien un benefici de 192€, si la Joana i en Martí es decidissin per B i en Dani per C rebrien 218€.
- Escriuiu un sistema d'equacions que descriu les diferents situacions
 - Sense resoldre el sistema, determineu la quantitat total de diners invertida per tots tres.
 - Trobeu, si existeix, un valor k per al qual hi hagi infinites solucions. Resoleu el sistema per a aquest valor i doneu-ne tres solucions diferents.
33. **(PAU 2007)**. Una companyia aèria de baix cost fa vols des de Girona fins a tres ciutat A, B i C. Calculeu el preu del bitllet de cada vol amb la informació següent: si ven 10 bitllets per anar a A, 15 per a B i cap per a C, ingressa 925€; si ven 12 bitllets per a A, 8 per a B i cap per a C, ingressa 760€; i si ven 6 bitllets per a A, 5 per a B, i 8 per a C, ingressa 855€
34. **(PAU 2002)**. En un teatre es representen tres espectacles musicals, que anomenem E_1 , E_2 , i E_3 i que tenen un preu diferent. Calculeu el preu de cada espectacle sabent que:
- Si assistíssim dues vegades a E_1 , una vegada a E_2 i una vegada a E_3 , ens costaria 34€.
 - Si anéssim tres vegades a E_1 i una vegada a E_2 ens costaria 46.5€.
 - En el cas d'assistir només una vegada a cada un dels espectacles, ens costaria 21.5€.
35. **(PAU 2004)**. Tenim dues caixes de llibres, A i B. Si passem 12 llibres de A a B, totes dues caixes tenen el mateix nombre de llibres. Però si passem 12 llibres de B a A, la caixa A té el triple de llibres que la B. Quants llibres conté inicialment cada caixa?.
36. **(PAU 2004)**. A un litre de llimonada que contenia el 25% d'aigua i el 75% de suc de llimona li hem afegit un quart de litre d'aigua. Calculeu el percentatge d'aigua i de suc de llimona que té ara la llimonada.?
37. **(PAU 2004)**. Tres germans tenen edats diferents que sumen 37 anys. Sabem que l'edat del gran més el doble de la del mitjà més el triple de la del petit dona 69 anys.
- Expresseu l'edat de cada germà en funció de la del petit.
 - És possible que el germà petit tingui 5 anys? I 12 anys?. Raoneu la resposta.
 - Calculeu l'edat de tots tres germans.

38. **(PAU 2000)**. Dos productes han costat 220€. La setmana següent es fa la mateixa compra i, com que el primer article està rebaixat el 10% i el segon el 20%, només s'ha pagat 186€. Quant s'haurà de pagar si els preus estan rebaixats el 10% i el 20% , respectivament, amb relació als preus de la segona setmana?
39. **(PAU 1997)**. El dilluns d'una certa setmana, els articles A, B i C d'uns grans magatzems es rebaixen el 5%, el 6% i el 8%, respectivament. Dimarts, en canvi es rebaixen el 2%, el 8% i el 6% sobre el preu inicial (no sobre el preu rebaixat el dilluns), Finalment, divendres es rebaixen el 4%, el 7% i el 6% sobre el preu inicial. Si un client que tots tres dies compra una unitat de cadascun d'aquest articles s'estalvia 210€, 210€ dimarts i 210€ divendres, quin és el preu per unitat de cada article?
40. **(PAU 1997)**. Durant tres dies seguits, tres persones (A, B i C) surten de casa amb una certa quantitat de diners cadascun (la mateixa tots tres dies) i aposten al canòdrom. El primer dia afirmen que A ha perdut el 10% del que portava, B n'ha guanyat el 20% i C n'ha perdut el 50%. La suma de les pèrdues i guanys diuen que ha estat de 20€. El segon dia afirmen que A ha guanyat el 20% del que portava, B n'ha guanyat el 40% i C n'ha guanyat el 50% i que la suma de les pèrdues i guanys diuen que ha estat de 80€ . El tercer dia afirmen que A ni ha guanyat ni ha perdut, B ha guanyat el 60% i C n'ha perdut el 30% i que la suma de les pèrdues i guanys diuen que ha estat de 60€. Pot se veritat el que diuen?. Raoneu la resposta.
41. Una empresa fabrica tres models de televisors; A, B i C. El model A ha de passar dues hores a la unitat de muntatge, el model B tres i el model C una. El model A ha de passar una hora a la unitat d'acabats, el model B dues hores, i el model C tres. En total, la unitat de muntatge ha de funcionar 25 hores, i la d'acabats, 26 hores. Si s'han produït 14 televisors, quants n'hi ha de cada model?.