TEMA 6 : Geometria en l'espai

Activitats

1. Siguin els punts A(1,2,3), B(0,1,3) i C(2,3,1)
   a) Trobeu el vector $\overrightarrow{AB}$
   b) Calculeu el mòdul del vector $\overrightarrow{AC}$
   c) Trobeu el vector unitari d'igual direcció que el vector $\overrightarrow{BC}$ però de sentit contrari
   d) Si el vector $\overrightarrow{MN}$ essent N(1,7,5) és equipol·lent a $\overrightarrow{AB}$, quines són les coordenades del punt M?

2. Siguin dos punts A(1,1,1) i B(-1,3,4).
   a) Trobeu les coordenades del punt M que divideix el segment AB en dos parts iguals
   b) Trobeu les coordenades dels punts M i N que divideixen el segment AB en tres parts iguals

3. Si els punts A(0,0,0), B(1,1,1) i C(2,-1,3) són tres vèrtex consecutius d'un paral·lelogram:
   a) Trobeu les coordenades del vèrtex que falta D
   b) Trobeu els angles del paral·lelogram ABCD
   c) Calculeu el perímetre del paral·lelogram
   d) Calculeu l'àrea del paral·lelogram ABCD
   e) Calculeu el perímetre del triangle format pels punts A, B i C
   f) El triangle ABC és rectangle?
   g) Quins són els angles d'aquest triangle
   h) Quant val la seva àrea
   i) Calculeu el perímetre del triangle format pels punts A, B i C
   j) Si el paral·lelogram ABCD és la base del paral·lelepípede (prisma de sis cares), i el punt E(1,3,5) és un vèrtex de la base superior que es troba en la mateixa aresta que el punt A. Trobeu els punts F, G, H que corresponen als vèrtex de la base superior que es troben en les mateixes arestes que la base inferior B, C, i D respectivament.
   k) Calculeu l'àrea lateral del paral·lelepípede
   l) Calculeu l'àrea total del paral·lelepípede
   m) Calculeu el volum del paral·lelepípede

4. Donats els punts A(1,-2,1), B(-1,3,-2), C(2,-1,3) i D(3,4,5). Trobeu el volum de la piràmide de base ABC i vèrtex D.

5. Siguin els vectors $\vec{a}$ (-2,-1,0), $\vec{b}$ (1,-1,2) i $\vec{c}$ (0,-4,5).
   a) Calculeu $5\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$
   b) Calculeu $\vec{a} \cdot \vec{b}$
   c) Trobeu l'angle que formen $\vec{b}$ i $\vec{c}$
   d) Calculeu $\vec{b}$ x $\vec{c}$
   e) Trobeu un vector perpendicular a $\vec{a}$ i $\vec{c}$ alhora

6. Trobeu el valor del paràmetre p que fa que els vectors $\vec{a}$ (1,2,p) i $\vec{b}$ (5,4,-2) siguin perpendiculars.

7. Indiqueu en cada cas , si els vectors són linealment dependentes, i si no ho són escriviu un dels vectors com a combinació lineal dels altres:

   a) (-3, 2, 5) i (6, -4, 10)
   b) (2, 6, 4) i (-5,-15,-10)
   c) (3, 1, -1); (2, -4, -3) i (2, 10, 4)
   d) (3, 1, -1); (1, 0, -3) i (0, 1, -4)
   e) (2, -10, 8); (3, -15, 12) i (-7, 35, - 28)

8. Trobeu el valor del paràmetre a que fa que els vectors (2, 8, 12) i (1, a^2, 4 – a) siguin linealment dependents.

9. Si les components d'un vector $\vec{a}$ en la base B={(0,1,1), (1,-1,0), (1,1,1)}, són (3,5,-2), quines són les seves components en la base canònica

10. Trobeu les components del vector $\vec{t}$ en la base B, si les seves components en la base B' són (1,-1,2)

    B= {$\vec{u}$(1,0,1), $\vec{v}$(-1,1,1), $\vec{w}$(2,1,3)}
    B'= {$\vec{a}$(0,1,1), $\vec{b}$(1,-1,0), $\vec{c}$(1,1,1)}

11. **(PAU 2007).**Siguin els punts de l'espai P(-1, a – 1, 3), Q(0, a – 2, 1 – a) i R(2, -1, 6 – 6a). Trobeu els valors de a perquè els tres punts estiguin alineats

12. **(PAU 2004).** Per a quins valors de k formen un triangle els punts A(1,1,2), B(0,1,1) i C (k,1,5)

13. **(PAU 1997).**Considereu tres punts de l'espai A, B, M que compleixen la relació $\overrightarrow{AB} = -2 \cdot \overrightarrow{AM}$.

    a) Digueu quin ha de ser el valor de r perquè es compleixi l'expressió $\overrightarrow{MA} = r \cdot \overrightarrow{MB}$
    b) Si la relació anterior entre vectors s'hagués produït en el pla i les coordenades de A i B fossin A(3,-5) i B(-5,7), quines serien les coordenades de M?. Justifiqueu la resposta.

14. **(PAU 1997).** Considereu els punts de l'espai O(0,0,0), A(1,1,2) i B(1,-1,3). Expressa el vector $\overrightarrow{OA}$ com a suma d'un vector de la mateixa direcció que $\overrightarrow{OB}$, i un vector perpendicular a $\overrightarrow{OB}$

15. **(PAU 1997).**Un vector $\vec{u}$ de l'espai forma un angle de 60º amb l'eix de les x i un de 30º amb l'eix de les y. Sabent que les dues primeres coordenades del vector són positives i que el seu mòdul és 7, calculeu-ne les tres components .

16. **(PAU 2003).** Considereu els punts de l'espai següents:

A(0, -2a – 1, 4a – 2), B(1, -3,4) i C(3,-5, 3).

a) Comproveu que el triangle ABC és rectangle en B per a qualsevol valor de a
b) Calculeu els valors de a que fan que aquest triangle sigui isòsceles

17. Cerqueu el valor de m que fa que els vectors (4, m, 2m) i (-3, 2, 1) siguin ortogonals.

18. **(PAU 2004).** Els punts A(k – 3, 2, 4) , B(0, k + 2, 2) i C(-2, 6, k+1) són tres vèrtex d'un rombe ABCD.

a) Calculeu el valor de k
b) Demostreu que el rombe és un quadrat

19. **(PAU 2000).**Un quadrat de l'espai té tres vèrtex consecutius situats en els punts de coordenades enteres P (3, -2, 4), Q(a, -1, a + 1) i R(2, -3, 0).

a) Tenint en compte que els vectors $\overrightarrow{QP}$ i $\overrightarrow{QR}$ han de ser perpendiculars , calculeu el valor del nombre enter a.
b) Calculeu el quart vèrtex del quadrat
c) Calculeu-ne l'àrea

20. **(PAU 2005).** Els Punts A_1, A_2, A_3 i A_4 divideixen el segment d'origen el punt A(-1, 4, -2) i d'extrem el punt B en cinc parts iguals. Si sabem que les coordenades de A_2 són (1,0,2), quines són les coordenades de B.

21. **(PAU 2005).**Considereu els vectors de $|R^3$

$$\overrightarrow{v_1}(-1,3,4), \overrightarrow{v_2}(2,-1,-3) i\ \overrightarrow{v_3}(1,2k+1,k+3)$$

a) Trobeu l'únic valor de k per al qual aquests vectors no són una base de $|R^3$
b) Per a un valor de k diferent del que heu trobar en l'apartat a) , quines són les components del vector $\vec{w} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$ en la base B = $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$?

22. **(PAU 2000).** Considereu els vectors $\vec{u}$(1,-1,4), $\vec{v}$(1,0,0), $\vec{w}$(2,1,3)

a) Determineu si són linealment dependents o linealment independents
b) Calculeu la relació que hi ha d'haver entre els valors a i b perquè el vectors (a,1,b) sigui combinació lineal $\vec{u}$ i $\vec{v}$

23. **(PAU 2004).**Representeu gràficament els punts A(0,0,0) B(0,0,2), C(0,2,0) i D(2,0,0), i calculeu el volum del tetraedre (piràmide de base triangular) ABCD

24. **(PAU 2005).** Donats els punts A(1,0,0) i B(0,0,1) trobeu un punt C sobre la recta r de manera que el triangle ABC sigui rectangle en C.

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$$

25. **(PAU 2007).** Siguin els punts de l'espai P(-1, a-1, 3), Q(0, a – 2 , 1 – a) i R(2, -1, 6 – 6a).

    a) Trobeu el valor de a per als quals tots tres punts estan alienats.
    b) Quan els tres punts estan alineats, quina és l'equació de la recta que els conté?

26. **(PAU 2007).** Trobeu l'equació de la recta continguda en el pla $\pi: x + 2y + 6z - 2 = 0$, que talla als eixos OY i OZ.

27. **(PAU 2007).** Calculeu l'equació de la recta paral·lela a $r: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ que passa pel punt P(0,1,0).

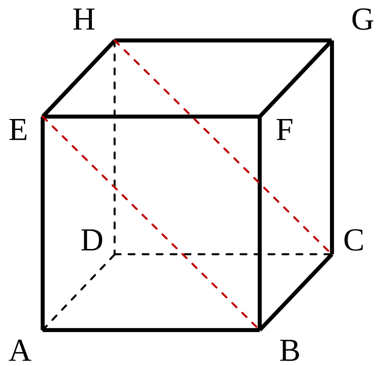
28. **(PAU 2001).** Considereu en l'espai les dues rectes

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+1}{-1} \text{ i } s: \frac{x+4}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{1}$$

    a. Determineu el punt de tall de la recta r amb el pla z = 0
    b. Comproveu que r i s són paral·leles
    c. Quina és l'equació del pla que conte totes dues rectes?

29. **(PAU 1999).** Considereu el tetraedre de vèrtex A(0,0,0), B(1,1,1), C(3,0,0) i D(0,3,0)
    a) Calculeu l'equació del pla que conté la cara BCD i la del pla que conté la cara ACD.
    b) Calculeu les equacions de dues altures del tetraedre, la que passa pel vèrtex A i la que passa pel vèrtex B (l'altura del tetraedre és la recta que passa per un vèrtex i és perpendicular al pla que determina la cara oposada)
    c) Comproveu que les dues altures es tallen en un punt P
    d) Esbrineu si la recta que uneix qualsevol vèrtex del tetraedre amb P és perpendicular a la cara oposada (es per tant, una altura del tetraedre)

30. **(PAU 2002).** Considereu el cub de vèrtex A, B, C, D, E, F, G i H que té l'aresta de 4 dm de longitud



a) Determineu l'equació del pla inclinat EHBC prenent com origen de coordenades el vèrtex D i com a eixos de coordenades DA, DC i DH (en aquest ordre), tenint en compte que , en cada cas, el sentit positiu és el de l'origen D cap a A, C i H respectivament.
b) Calculeu les equacions de les diagonals CE, i AG i utilitzeu-les per trobar les coordenades del seu punt d'intersecció.

31. **(PAU 2004).** Donats els quatre punts de l'espai A(0,0,0) B(0,0,2), C(0,2,0) i D(2,0,0), trobeu l'equació de pla que passa per B, C i D.

32. **(PAU 2003).** Determineu l'equació del pla que conté la recta $r\colon x-1=\frac{y}{2}=z+1$, i passa per l'origen de coordenades.

33. **(PAU 2007).** Una recta r és paral·lela a $s\colon x-1=y-1=z-1$ i talla en un punt A la recta $t\colon \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=z-1$ i en un punt B la recta $l\colon \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$

a) Trobeu l'equació de la recta determinada per les rectes r i t
b) Trobeu el punt B calculant el punt d'intersecció del pla anterior amb la recta l
c) Trobeu l'equació de la recta r.
d) Trobeu el punt A

34. **(PAU 2004).** Considereu els punts de l'espai A(0,0,1), B(1,1,2) i C(0,-1,-1).

a) Trobeu l'equació del pla ABC
b) Si D és el punt de coordenades (k,0,0), quant ha de ser el valor de k perquè els quatre punts A,B,C i D siguin coplanaris?.

35. **(PAU 2000).** Un quadrat de l'espai té tres vèrtex consecutius en els punts de coordenades enteres P(3, -2, 4), Q(a, -1, a+1) i R(2, -3, 0).
a) Tenint en compte que els vectors $\overrightarrow{QP} i\ \overrightarrow{QR}$ han de ser perpendiculars, calculeu el valor del nombre enter a.
b) Escriviu l'equació del pla que conté aquest quadrat.

36. **(PAU 1999).** Considera en l'espai |R^3 la recta $r\colon \frac{x-3}{2}=y=\frac{z+1}{2}$. Trobeu l'equació general del pla que conté a r i passa pel punt P(1,1,1)-

37. **(PAU 2008).** Les rectes següents són coplanàries:

$$r_1\colon \frac{x-a}{2}=y=\frac{z-1}{4}\ \ i\ \ r_2=x-2=\frac{y-b}{2}=\frac{z-4}{-1}$$

a) Expliqueu raonadament quina es la seva posició relativa
b) Trobeu la relació que hi ha entre els paràmetres a i b
c) Trobeu els valors de a i b si el pla que les conté passa pel punt P(2,4,6).

38. **(PAU 2004).** Considereu les rectes següents:

$$r: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2} \;\; i \;\; s: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1-4t \\ z = 5+t \end{cases}$$

a) Estudieu la seva posició relativa
b) Trobeu l'equació del pla que conté s i és paral·lel a r

39. **(PAU 1999).** Donades les rectes r: $\frac{x-1}{2} = y = z-2 \;\; i \;\; s$: $\left. \begin{matrix} x-2z=5 \\ x-2y=11 \end{matrix} \right\}$, comproveu que són paral·leles i calcula l'equació del pla que les conté.

40. **(PAU 2006).** Considereu la recta r: $\begin{cases} 2x-5y-z-3=0 \\ x-3y-z-2=0 \end{cases}$ i el pla $p: 2x-y+az+2=0$, on a és un paràmetre.

a) Trobeu un vector director de la recta i un vector perpendicular del pla
b) Quin ha de ser el valor de a perquè la recta i el pla siguin paral·lels? Trobeu la distància entre tots dos elements.
c) Digues si existeixen valors de a per als quals la recta i el pla siguin perpendiculars. En cas afirmatiu, calcula'ls.
d) Digueu si existeixen valors de a pel als quals la recta i el pla formin un angle de 30º. En cas afirmatiu, calcula'ls.

41. **(PAU 2000).** Considereu la recta de l'espai que passa pel punt P(1,1,3) i té per vector director $\vec{v}(1-a, a, 1)$ i el pla que té per equació 2x + y – z = 1.

a) Determineu, per a cada valor del paràmetre a, la posició relativa de la recta r respecte al pla.
b) Hi ha algun valor del paràmetre a per al qual la recta r sigui perpendicular al pla?
c) Calculeu la distància que hi ha entre el punt P i el pla

42. **(PAU 1998).** Sigui el pla de l'espai que passa per (0,0,3) i conté els vectors $\vec{u}(1,2,-5) \; i \; \vec{v}(2,1,-3)$, i la recta d'equació r: $\left. \begin{matrix} 4x-y+z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{matrix} \right\}$

a) Escriviu l'equació general o cartesiana del pla
b) Estudieu la posició relativa de la recta respecte del pla

43. **(PAU 1997).** Estudieu segons els diferents valors que pot tenir el paràmetre m, les posicions relatives del pla i la recta següent:

$$\pi: mx-3y+2z=1 \;\; i \; r: \left. \begin{matrix} 3x+y=1 \\ 2x-y+mz=1 \end{matrix} \right\}$$

44. **(PAU 2002).** Considereu les plans

$$\pi_1: x + 2y - z = 3 \;\; i \;\; \pi_2: ax + (a-2)y + 2z = 4$$

a) Hi ha algun valor del paràmetre a per al qual la intersecció dels plans no sigui una recta?
b) Calculeu el vector director de la recta que s'obté quan es fa l' intersecció dels plans per a = 0

45. En estudiar la posició relativa de tres plans en funció del paràmetre k pel mètode de Gauss, hem arribat a la matriu ampliada següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & k-2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array}\right)$$

Discutiu-ne la posició segons els valors de k

46. Discutiu la posició relativa dels plans següents en funció del valor del paràmetre a i determineu-ne les interseccions:

$$\pi_1: ax + y + z = a + 1$$
$$\pi_2: 2x - y + az = a + 2$$
$$\pi_3: x - y + z = 4$$

47. **(PAU 2008).** Donades les rectes $r: x - 2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \;\; i \;\; s: x - 1 = \frac{y+7}{2} = \frac{z-5}{3}$ i el punt P(1,1,-1), volem trobar l'equació de la recta que passa per P i talla a r i s. Per aconseguir-ho:

a) Trobeu l'equació general o cartesiana del pla π que conté la recta r i el punt P
b) Trobeu el punt M d'intersecció entre aquest pla π i la recta s
c) Trobeu l'equació de la recta que passa pels punts P i M
d) Comproveu que la recta trobada en l'apartat anterior és la que busquem

48. **(PAU 2001).** Siguin els punts de l'espai A(2,0,0), B(0,1,0) i C(0,0,3)

a) Determineu l'equació del pla que els conté
b) Calculeu la recta perpendicular al pla que passa per l'origen

49. **(PAU 1999).** Considereu les rectes:

$r_1: \left.\begin{array}{r} 4x - y - z = 0 \\ 2x + y - 2z - 1 = 0 \end{array}\right\} \; i \;\; r_2: x = \frac{y}{3} = z$, calculeu l'equació del pla paral·lel a totes dues rectes que passa per l'origen

50. **(PAU 2002).** Considereu les rectes

$$r: \left.\begin{array}{r} x-y+3=0 \\ 2x-z+2=0 \end{array}\right\} \quad i \quad s: \left.\begin{array}{r} y+\dfrac{1}{3}=0 \\ x-2z-3=0 \end{array}\right\}$$

a) Calculeu en cada cas un punt i un vector director
b) Determineu si existeixen cada un dels elements següents, i en cas afirmatiu, calculeu-ne l'equació:
   b_1) El pla paral·lel a s que conté la recta r
   b_2) El pla perpendicular a s que conté a la recta r
   b_3) La recta perpendicular a r i s que passa per l'origen

51. **(PAU 2007).** En l'espai es consideren tres plans d'equacions

$\pi_1: \ x+2y+z=1$
$\pi_2: px+y+pz=1$, on p és un paràmetre real
$\pi_3: px+y+2z=1$

a) Esbrineu per a quins valors del paràmetre p els tres plans es tallen en un únic punt. Trobeu aquest punt quan p = 1
b) Hi ha algun valor de p que faci que la intersecció comuna sigui una recta?. Si és així, escriviu l'equació vectorial d'aquesta.
c) Trobeu la posició relativa dels tres plans per a p = $\frac{1}{2}$

52. **(PAU 2004).** Considereu els punts de l'espai A(1,1,0), B(0,1,2) i C(-1,2,1). Us diuen que aquests tres punts formen part del conjunt de solucions d'un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites. Raoneu adequadament les respostes següents:

a) Aquest punts estan alineats?
b) Podem saber el rang de la matriu del sistema d'equacions?

53. **(PAU 1997).** Estudieu la posició relativa de les rectes de l'espai donades per les equacions següents:

$$r: \left.\begin{array}{r} 2x+z=9 \\ y=1 \end{array}\right\} \quad i \quad s: \left.\begin{array}{r} x=-y \\ 2y+z=-3x+5 \end{array}\right\}$$

54. **(PAU 2002).** Comproveu que la recta que passa pels punts A(4,0,0) i B(0,2,2) és paral·lela al pla d'equació x – 3y + 5z = 2

55. **(PAU 2003).** Considereu el punt P(5,-2,9) i la recta r: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{6}$,:

a) Trobeu l'equació de la recta s que talla perpendicularment a r i passa per P
b) Calculeu el punt de tall T entre les rectes r i s

56. **(PAU 2001).** Determineu per a quins valors del paràmetre a el pla $\pi: ax+2y+z=a$ és paral·lel a la recta r: $\left.\begin{array}{r} x-ay+z=1 \\ ax+z=a+1 \end{array}\right\}$

57. Trobeu l'equació de la perpendicular a la recta r: (x, y, z,) = (1,-1,1) + t(0,1,1) traçada des del punt P (1,0,-1)

58. Discutiu i, si s'escau resoleu el sistema següent. Després interpreteu-ne geomètricament el resultat

$$\left.\begin{aligned} 4x+6y-8z&=2\\ 6x+9y-12z&=3\\ x+2y+z&=10 \end{aligned}\right\}$$

59. Determineu la posició relativa dels plans següents en funció del paràmetre real a

$\pi_1: x+2y+(a+2)z=0$
$\pi_2: x+2ay+3z=9$
$\pi_3: 2x-z=4$

60. **(PAU 2008).** Trobeu l'equació de la recta perpendicular al pla 2x – y – z – 3 = 0 que passa pel punt (-1,3,a) del pla

61. **(PAU 2007).** Trobeu l'equació del pla perpendicular a la recta
$r: \left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 2x+y&=3 \end{aligned}\right\}$ que passa per l'origen de coordenades

62. **(PAU 2009).** Donat el punt P(1,2,3) i la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-5}{-1}$
    a) Trobeu l'equació cartesiana del pla π que és perpendicular a r i passa per P
    b) Trobeu el punt de tall entre la recta r i el pla π

63. **(PAU 2009).** Siguin r i s dues rectes de l'espai les equacions respectives de les quals, que depenen d'un paràmetre real b, són les següents:
$r: \begin{cases} bx+y+3z=1\\ x+2y+5z=1 \end{cases}, \; i \; s: \frac{x}{1}=\frac{y-b}{b-1}=\frac{z+1}{-1}$

    a) Trobeu el punt de tall de la recta r amb el pla d'equació x = 0 , i el punt de tall de la recta s amb aquest mateix pla
    b) Calculeu un vector director per cada una de les dues rectes
    c) Estudieu la posició relativa de les dues rectes en funció del paràmetre b

64. **(PAU 2009).** Donats el pla $\pi: x+2y-z=0$ i el punt P(3,2,1)
Calculeu l'equació contínua de la recta que passa per P i és perpendicular a π
Calculeu el punt simètric de P respecte al pla π

65. **(PAU 2009).** Siguin $P(3-2a,b,-4), Q(a-1,2+b,0) i\ R\ (3,-2,-2)$ tres punts de l'espai $|R^3$
    a) Calculeu els valor dels paràmetres a i b perquè els tres punts estiguin alineats
    b) Calculeu l'equació contínua de la recta que els conté quan estan alineats
    c) Quan b = 0 trobeu els valors del paràmetre a perquè la distància entre els punts P i Q sigui la mateixa que la distància entra P i R
    d) Si b = 0, calculeu el valor del paràmetre a perquè els punts P, Q i R formin un triangle equilàter

66. **(PAU 2009).** Considerem en l'espai $|R^3$ les rectes r i s les equacions respectives de les quals són:

$r: (x, y, z) = (4,1,0) + \ t(m, 1,1) \ \ i \ \ s: \begin{cases} x + 2y + mz = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ en què m és un paràmetre real. Estudieu si hi ha cap valor d'aquest paràmetre per al qual les rectes siguin perpendiculars i es tallin

67. **(PAU 2009).** Donats els vectors

$$\overrightarrow{v_1}(a + 1{,}2a, 1), \overrightarrow{v_2}(-2, a, 2a) i \ \overrightarrow{v_3}(a, -2{,}4a - 2)$$

a) Calculeu l'angle que formen $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ quan a = 0
b) Trobeu el valor del paràmetre a perquè els vectors $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ i $\overrightarrow{v_3}$ siguin perpendiculars dos a dos

68. **(PAU 2007).** Considereu la recta $r: x = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$

a) Expresseu el quadrat de la distància d'un punt (x,y,z) qualsevol de la recta al punt P(1,2,59 com una funció de la coordenada x
b) Trobeu quins valors de x fa mínima aquesta funció, deduïu quin punt Q de la recta és el més proper a P i calculeu la distància del punt P a la recta
c) Escriviu l'equació de la recta que passa per P i Q i comproveu que és perpendicular a r

69. **(PAU 2007).** Determineu els extrems d'un segment AB sabent que el punt A pertany al pla 2x + y + z = 0 i el punt B pertany a la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$ i el punt mitja del segment és (0,0,0)

70. **(PAU 2006).** Una recta r passa pel punt A(3,0,2) i té la direcció del vector (1,1,4):

a) Trobeu l'angle que forma la recta amb el pla horitzontal
b) Comproveu que no passa pel punt B(1,3,10)
c) Trobeu l'equació de la recta que passa per A i B

71. **(PAU 2002).** Calculeu l'angle que forma el pla d'equació x – 2y + z = 1 amb la recta determinada per les equacions paramètriques següents:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \ 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$$

72. **(PAU 2000).** Considereu la recta de l'espai que passa pel punt P(1,1,3) i té vector director $\vec{v}(1 - a, a, 1)$ i el pla π : 2x + y – z = 1.

a) Determineu, per a cada valor de a la posició relativa de la recta r respecte del pla π
b) Hi ha alguna recta r que sigui perpendicular al pla π?
c) Calculeu la distància que hi ha entre el punt P i el pla π

73. **(PAU 2000).** Trobeu l'equació de la perpendicular a la recta r: (x,y,z) = (1,-1,1) + t(0,1,1) traçada des del punt P(1,0,-1)

74. **(PAU 2000).** Donats el pla π: x + 2y + 3z – 1 = 0 i la recta $r\colon \left.\begin{matrix} x = 2z - 3 \\ y = z + 4 \end{matrix}\right\}$ i el punt P(2,1,1), calculeu:

a) L'equació de la recta que passa per P i és perpendicular a π
b) L'equació del pla que passa per P i és perpendicular a r
c) L'equació de la recta que passa per P i talla perpendicularment la recta r
d) L'equació de la recta que passa per P i és paral·lela a π, i que tal que el seu vector director és perpendicular al de r

75. **(PAU 1999).** Considereu els punts de l'espai següents:

A(2,1,0), B(0,2,0), C(-3,0,0) i D(0,-1,0)

a) Són coplanaris?
b) Formen un paral·lelogram?
c) Calculeu l'àrea del polígon ABCD
d) Calculeu el punt simètric de E(1,1,2) respecte del pla que determinen A,B i C.

76. **(PAU 1998).** Determineu les coordenades de la projecció ortogonal del punt H(1,3,-2) sobre el pla π: 2x – y + 2z = 4

77. **(PAU 2003).** Un segment d'extrems A(5,3,1) i B(4,2,-1) es divideix en tres parts iguals mitjançant dos plans perpendiculars a $\overline{AB}$. Calculeu les equacions dels dos plans i la distància entre ells.

78. **(PAU 2006).** Determina l'equació del pla perpendicular a la recta $r\colon \left.\begin{matrix} x - y - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{matrix}\right\}$ que passa pel punt (1,1,2). Quina distància hi ha entre aquest pla i l'origen de coordenades?

79. **(PAU 2008).** Sigui el punt P(7,5,1), i el pla π: x – 2y – 3 z = 10 i la recta $r\colon \left.\begin{matrix} 3x - 2y - 2z = 7 \\ x - 6y - 2z = 5 \end{matrix}\right\}$

a) Trobeu la distància de P a π
b) Trobeu la distància de P a r
c) Trobeu la distància de r a π

80. **(PAU 2007).** Trobeu els punts de la recta r: x – 1 = y + 2 = z que equidistin dels plans π_1 : 4x – 3z – 1 = 0 i π_2 : 3x + 4y – 1 = 0.

81. **(PAU 2006).** Trobeu les coordenades dels punts de la recta r: (-1,1,1) + t(1,2,1) que disten 1 unitat del pla π: 2x + 2y + z = 5

82. **(PAU 2005).** Calculeu la distància entre la recta $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{3}$ i el pla $\pi: 3x + 4y + 7 = 0$

83. **(PAU 2005).** Una piràmide de base quadrada té la cúspide en el pla d'equació z =3. Tres dels vèrtex de la base són els punts del pla OXY: A(1,0,0) B(1,1,0) i C(0,1,0)

   a) Feu un gràfic dels elements del problema. Quines són les coordenades del quart vèrtex de la base, D?
   b) Quin és el volum de la piràmide?
   c) Si la cúspide de la piràmide és el punt (a,b,3), quina equació té la recta que conté l'altura sobre la base?

84. **(PAU 2004).** Considereu les rectes següents:

$$r: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2} \quad i \quad s: \left.\begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 + t \end{array}\right\}$$

   a) Estudieu la seva posició relativa
   b) Trobeu l'equació del pla que conté a s i és paral·lela r
   c) Calculeu la distància entre r i s

85. **(PAU 2004).** Considereu el punt M(2,3,7) i la recta d'equació $r: \left.\begin{array}{l} x = -3 + 2t \\ y = 5 - 2t \\ z = 3 + t \end{array}\right\}$

   a) Trobeu, en funció de t, la distància de M a un punt qualsevol de la recta r.
   b) Trobeu les coordenades dels punts A i B de r que disten $3\sqrt{2}$ unitats del punt M
   c) Digueu si el triangle AMB és rectangle en M
   d) Calculeu les coordenades dels punts C i D perquè formen un paral·lelogram ABCD amb M com a centre de simetria

86. **(PAU 2004).**Representeu gràficament els punts A(0,0,0) B(0,0,2), C(0,2,0) i D(2,0,0), i calculeu el volum del tetraedre (piràmide de base triangular) ABCD

87. **(PAU 2004).** Considereu els quatre punts de l'espai A(0,0,0) B(0,0,2), C(0,2,0) i D(2,0,0)

   a) Representeu gràficament els quatre punts
   b) Calculeu el volum del tetraedre ABCD
   c) Trobeu l'equació del pla que passa per B, C i D
   d) Calculeu la distància de l'origen al pla anterior

88. **(PAU 2002).** Comproveu que la recta que passa pels punts A(4,0,0) i B(0,2,2) és paral·lela al pla d'equació x – 3y + 5z = 2 i calculeu la distància entre la recta i el pla.

89. **(PAU 2002).** Considereu la recta $r: x - 1 = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-7}{-4}$ i calculeu-ne els punts que equidisten 3 unitats del punt A(1,0,1).