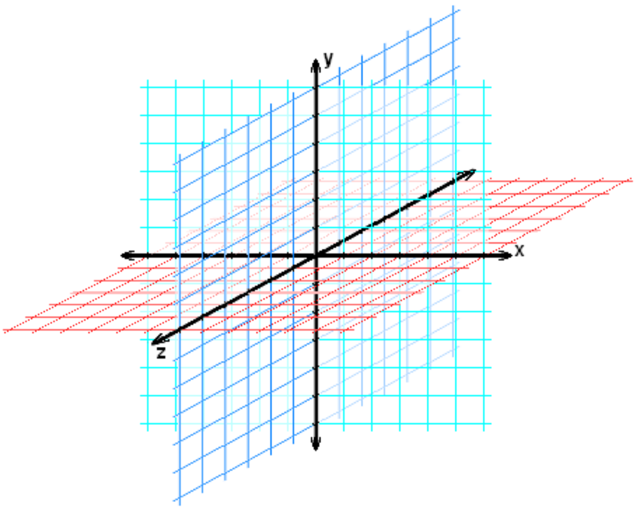
TEMA 6 : Geometria en l'espai

6.1. VECTORS EN L'ESPAI

6.1.1. DEFINICIÓ. CONCEPTES BÀSICS

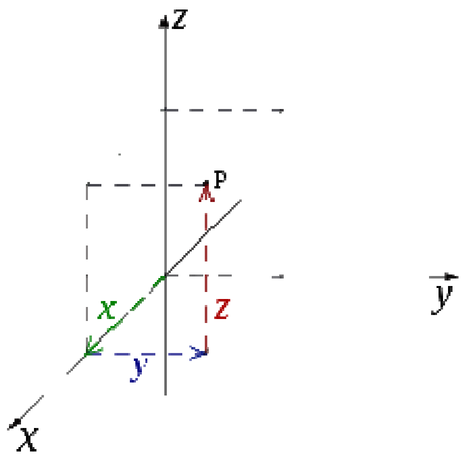
a) Representació de punts en l'espai

Un sistema de coordenades tridimensional es construeix traçant un eix Z, perpendicular en l'origen de coordenades als eixos X i Y



Els eixos de coordenades determinen tres plànols XY, XZ i YZ . Aquest plans divideixen l'espai en vuit regions anomenades octants .

Cada punt en l'espai queda determinat per tres coordenades P(x,y,z)



b) Magnituds escalars i vectorials

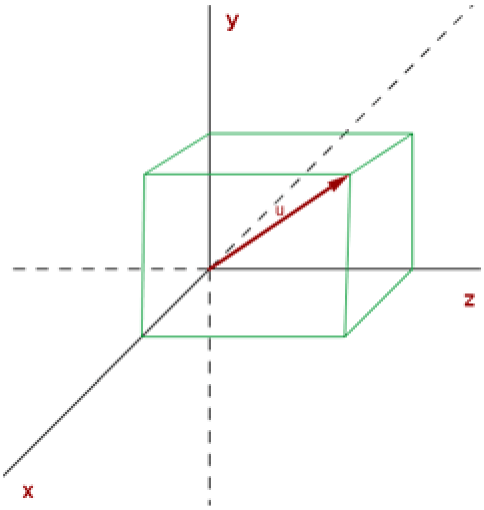
- Una *magnitud escalar* és aquella que queda determinada per un nombre
- La *magnitud vectorial* és aquella que no queda determinada per un nombre, cal especificar la direcció i el sentit.

EXMPLES

El temps, el pes,... són magnituds escalars
La força, és una magnitud vectorial.

c) Vector en l'espai

- Un *vector* és un segment orientat.
- El punt on comença el vector s'anomena *origen*
- El punt on acaba el vector s'anomena *extrem*
- El *mòdul* es la longitud del vector
- *Direcció* es la recta sobre la qual situem el vector
- *Sentit* és el que indica la punta de la fletxa del vector



- Components d'un vector : Coordenades del extrem – coordenades de l'origen

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1 , b_2 - a_2 , b_3 - a_3)$$

- Mòdul d'un vector :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

- Vector equipol·lents són aquells que tenen la mateixa direcció, mòdul i sentit (tenen les mateixes components)

- Un vector és fix quan el seu origen (A) i el seu extrem (B) són coneguts, es

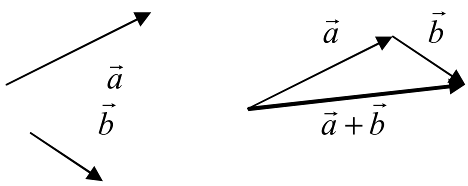
  representen per $\overrightarrow{AB}$

- Un vector és lliure si només es coneix les components, no l'origen ni l'extrem, es representa amb una lletra minúscula $\vec{v}$

6.1.2. OPERACIONS AMB VECTORS

a) Suma o resta de vectors

Gràficament



En components :

$\vec{a}$(a_1 , a_2 , a_3) $\vec{b}$ (b_1 , b_2 , b_3)

$\vec{a}+\vec{b}$ = ($a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$)

Propietats :

- Commutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}?$
- Vector neutre o nul: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

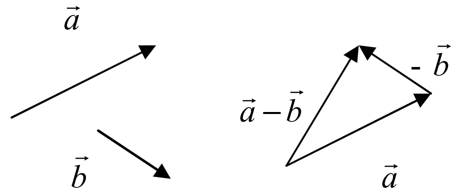
- Vector oposat : $-\vec{u}$: és un vector amb el mateix mòdul mateixa direcció i sentit contrari

  $\vec{u}$ (u_1 , u_2 , u_3) $\rightarrow$ $-\vec{u}$ (- u_1, - u_2 , - u_3)

<u>NOTA</u>

Per restar vector només cal sumar al primer l'oposat del segon $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

Gràficament

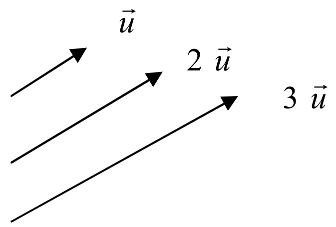


En components :

$\vec{a}$ (a_1 , a_2 , a_3) $\vec{b}$ (b_1 , b_2 , b_3)

$\vec{a} - \vec{b} =$ (a_1 - b_1 , a_2 - b_2 , a_3 - b_3)

b) <u>Producte d'un vector per un nombre</u>



El producte d'un nombre k per un vector $\vec{v}$ és un altre vector k $\cdot \vec{v}$ que presenta:

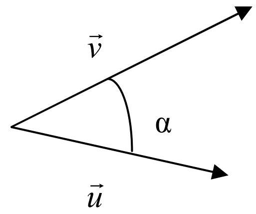
- La mateixa direcció que $\vec{v}$
- Si k $>$ 0 el mateix sentit que $\vec{v}$
- Si k $<$ 0 sentit contrari que $\vec{v}$
- $|$ k $\cdot$ $\vec{v}$ $|$ = $|$ k $|$ $\cdot$ $|$ $\vec{v}$ $|$ (k vegades el mòdul de $\vec{v}$)
- Components: k $\cdot$ $\vec{v}$ = (k$\cdot v_1$, k$\cdot v_2$, k$\cdot v_3$)
-

Propietats :

- Commutativa: k$\cdot k \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot k$
- Associativa respecte al producte escalar: $(k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{u} = k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{u})$
- Distributiva respecte a la suma de vectors: $k_1 \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k_1 \cdot \vec{u} + k_1 \cdot \vec{v}$
- Distributiva respecte a la suma d'escalars: $(k_1 + k_2) \cdot \vec{u} = k_1 \cdot \vec{u} + k_2 \cdot \vec{u}$
- Vector neutre respecte al escalar $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

6.1.3. PRODUCTE ESCALAR DE DOS VECTORS

a) Definició



Donat dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ anomenen producte escalar de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ al nombre que resulta de:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

b) Teorema

Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són vectors no nuls tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

Demostració:

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \\ |\vec{u}| \neq 0 \neq |\vec{v}| \end{array}\right\} \rightarrow \cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90^{\circ} \rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

$$\Leftarrow \vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \cos\alpha = 0 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot 0 = 0$$

c) Expressió analítica del producte escalar

En una base ortonormal si $\vec{u}\,(u_1,u_2, u_3)$ i $\vec{v}\,(v_1,v_2, v_3) \Rightarrow$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_2 \cdot v_2$$

d) Propietats del producte escalar

- Commutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Associativa del producte de un nombre : $\alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}$
- Distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

e) Angle de dos vectors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

6.1.4. PRODUCTE VECTORIAL DE DOS VECTORS

a) Definició

El producte vectorial de dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, que s'escriu $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$ o $\vec{u} \wedge \vec{v}$, és un altre vector amb les característiques següents:

- Mòdul: $|\vec{u} \text{ x } \vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \sin\alpha$, α és l'angle que formen els dos vectors
- Direcció: perpendicular als vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ alhora
- Sentit: el que indica la regla de la mà dreta o del llevataps (anat de $\vec{u}$ a $\vec{v}$)

b) Teorema

Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són vectors no nuls tal que $\vec{u} \text{ x } \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ i $\vec{v}$ tenen la mateixa direcció

Demostració:

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \vec{u} \text{ x} \vec{v} = 0 \rightarrow |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \sin\alpha \\ |\vec{u}| \neq 0 \neq |\vec{v}| \end{array}\right\} \rightarrow \sin\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0^{\circ} \text{ o } 180^{\circ} \rightarrow \vec{u} \text{ i } \vec{v} \text{ tenen la mateixa direcció}$$

$\Leftarrow$ $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tenen la mateixa direcció $\rightarrow \sin\alpha = 0 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \sin\alpha \rightarrow$
$\vec{u} \text{ x } \vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot 0 = 0$

c) Expressió analítica del producte escalar

En una base ortonormal si $\vec{u}(u_1,u_2, u_3)$ i $\vec{v}(v_1,v_2, v_3) \Rightarrow$ les components del vector $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$ es determinen calculant el determinat:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = u_2 \cdot v_3 \cdot i + v_1 \cdot u_3 \cdot j + u_1 \cdot v_2 \cdot k - u_3 \cdot v_2 \cdot i - u_1 \cdot u_3 \cdot j - u_2 \cdot v_1 \cdot k = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2)i + (v_1 \cdot u_3 - u_1 \cdot v_3)j + (u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1)k$$

O de manera més clara desenvolupant el determinat per la primera fila

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$(u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2)i - (u_1 \cdot v_3 - v_1 \cdot u_3)j + (u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1)k$$

Així dons: $\vec{u} \text{ x } \vec{v} = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2, v_1 \cdot u_3 - u_1 \cdot v_3, u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1)$

EXEMPLE

Donats els vectors $\vec{u}$ (2,5,-1) i $\vec{v}$ (3, -2,0), calculeu:

a) $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$ i $\vec{v} \text{ x } \vec{u}$

$$\vec{u} \text{ x } \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3j - 4k - 15k - 2i = -2i - 3j - 19k$$

$\vec{u} \text{ x } \vec{v} = (-2, -3, -19)$

$$\vec{v} \text{ x } \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2i + 15k + 4k + 3j = 2i + 3j + 19k$$

$\vec{v} \text{ x } \vec{u} = (2, 3, 19)$

Evidentment $\vec{u} \text{ x } \vec{v} \neq \vec{v} \text{ x } \vec{u}$

b) Comproveu que els vectors obtinguts són perpendiculars als originals

$\vec{u} \cdot (\vec{u} \text{ x } \vec{v}) = (2,5,-1) \cdot (-2, -3, -19) = -4 - 15 + 19 = 0 \rightarrow \vec{u} \perp \vec{u} \text{ x } \vec{v}$

$\vec{v} \cdot (\vec{u} \text{ x } \vec{v}) = (3,-2,0) \cdot (-2, -3, -19) = -6 + 6 + 0 = 0 \rightarrow \vec{v} \perp \vec{u} \text{ x } \vec{v}$

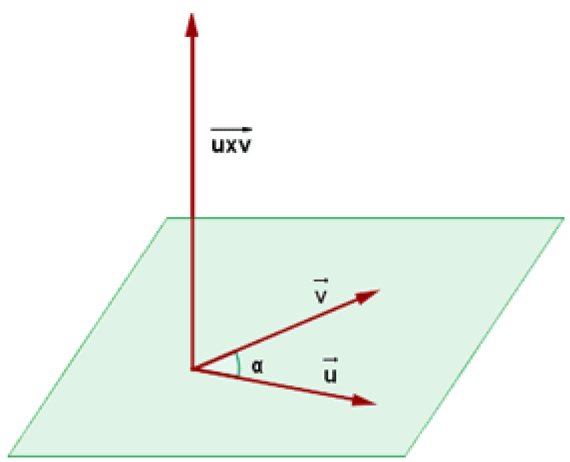
d) <u>Propietats del producte escalar</u>

- No compleix la propietat commutativa: $\vec{u} \text{ x } \vec{v} \neq \vec{v} \text{ x } \vec{u}$
- Distributiva: $\vec{u} \text{ x } (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \text{ x } \vec{v} + \vec{u} \text{ x } \vec{w}$

e) <u>Aplicacions del producte vectorial</u>

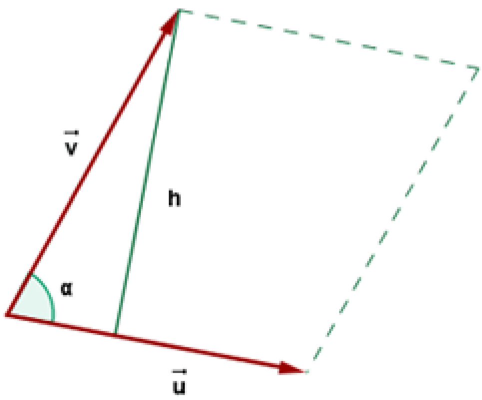
- Vector perpendicular a dos donats

Per calcular un vector perpendicular a $\vec{u}$ i $\vec{v}$, l'única cosa que hem de fer és calcular el vector $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$ o $\vec{v} \text{ x } \vec{u}$



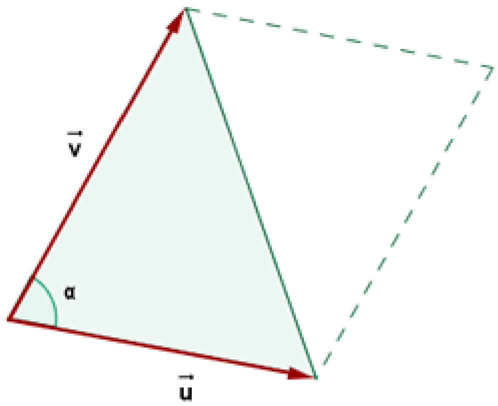
- Àrea del paral·lelogram generat per dos vectors donats $\vec{u}$ i $\vec{v}$

$$A = |\vec{u} \text{ x } \vec{v}|$$



- _Àrea del triangle generat per dos vectors donats $\vec{u}$ i $\vec{v}$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u} \text{ x } \vec{v}|$$



6.1.5. <u>PRODUCTE MIXT DE TRESVECTORS</u>

a) <u>Definició</u>

Donat tres vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ anomenen producte escalar de $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ i es representa per $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ al <u>nombre</u> que resulta de:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \text{ x } \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

b) Propietats del producte mixt

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

Aquestes propietats es dedueixen del fet que el determinant d'una matriu no s'altera si intercanviem dos files de cop

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = -\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = -\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$

_Aquestes propietats es dedueixen del fet que el determinant d'una matriu canvia de signe si permutem dues fila

- $k \cdot [\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})] = k \cdot \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \cdot (k \cdot \vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times k \cdot \vec{w})$

Recordeu que el producte d'un nombre per un determinant és igual al determinant de la matriu que resulta de multiplicar –ne una fila per aquest nombre

c) Aplicacions del producte mixt

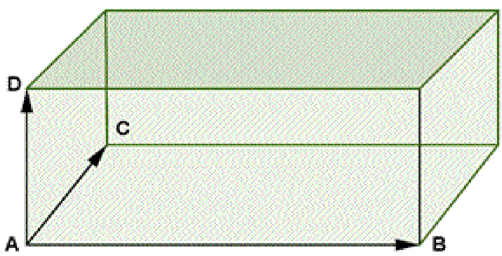
- Volum del paral·lelepípede generat per tres vectors donats $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

- Volum de la piràmide formada per tres vectors donats $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$

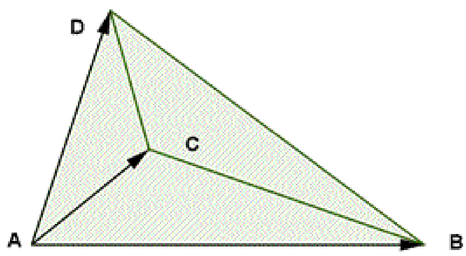
$$V = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{1}{6} \cdot |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

PARALELEPÍPEDO



$V = |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$

TETRAEDRO



$V = \frac{1}{6} |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$

6.1.6. BASES I SISTEMES DE REFERÈNCIA

a) Dependència i independència lineal de vectors

- Si a, b, c són nombres reals, i $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ vectors de l'espai ,qualsevol altre vector que ve donat per l'expressió a·$\vec{u}$ + b·$\vec{v}$ + c·$\vec{w}$ és una *combinació lineal* dels vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$
- Direm que n vectors $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$,......, $\vec{v_n}$ són linealment independents si l'equació $k_1 \cdot \vec{v_1} + k_2 \cdot \vec{v_2} + k_3 \vec{v_3} + \ldots k_n \cdot \vec{v_n} = \vec{0}$ (on $k_1, k_2, \ldots, k_n$ són nombres reals) només admet la solució $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$
- En cas contrari, es a dir si alguna k_i és deferent de zero, direm que els vectors són linealment dependents. En aquest cas un dels vectors es pot escriure com a combinació lineal dels altres.
- En l'espai $|R^3$:
  - ✓ Un vector és sempre linealment independent
  - ✓ Dos vectors $\vec{v}$ (v_1, v_2, v_3) i $\vec{w}$ (w_1, w_2, w_3) són linealment dependents si $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$ k € |R, es a dir si tenen la mateixa direcció, les seves components són proporcionals:

    $$\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3}$$

    En cas contrari els dos vectors són linealment independents (si les seves components no són proporcionals)
  - ✓ Tres vectors $\vec{v}$ (v_1, v_2, v_3) , $\vec{w}$ (w_1, w_2, w_3) i $\vec{u}$ (u_1, u_2, u_3) són linealment dependents si algun d'ells es pot escriure com a combinació lineal dels altres dos.

    Si $\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$ els vectors són linealment dependents

    Si $\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \neq 0$ els vectors són linealment independents
  - ✓ Més de tres vectors sempre són linealment dependents , sempre es pot escriure un d'ells com a combinació lineal dels altres.

b) Base de l'espai

Direm que n vectors $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$,......, $\vec{v_n}$, són *sistema generador de l'e*spai si qualsevol vector $\vec{w}$ d'aquest espai es pot escriure com a combinació lineal dels n vectors , es a dir

$$\vec{w} = k_1 \cdot \vec{v_1} + k_2 \cdot \vec{v_2} + k_3 \vec{v_3} + \ldots k_n \cdot \vec{v_n} \text{ amb algun } k_i \neq 0$$

- Direm que un conjunt de n vectors $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$,......, $\vec{v_n}$, és una *base* de l'espai si són linealment independents i, a més són un sistema generador de l'espai.

- Donat que en $|R^3$ més de tres vectors són sempre linealment dependents per trobar una base en l'espai hi haurà prou en escollir tres vectors linealment independents

- Donada una base en $|R^3$ B $=\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w}\}$ qualsevol vector $\vec{t}$ de l'espai es pot expressar com a combinació lineal dels vectors de la base, $\vec{t} = a\cdot\vec{u} + b\cdot\vec{v} + c\cdot\vec{w}$. , els valors reals a, b i c s'anomenen components del vector $\vec{t}$ en aquesta base $\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w}\}$, i generalment s'escriu $\vec{t}\ = (a,b,c)_{\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\vec{w}\}}$

- Direm que una *base és ortogonal* si els vectors que formem la base són perpendiculars entre ells.

- Direm que una *base és ortonormal* si els vectors que formen la base son perpendiculars i unitaris ($|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$)
- Dintre de les bases ortonormals cal destacar la anomenada base canònica que es la formada pels vectors $\{\vec{e_1}(1,0,0), \vec{e_2}(0,1,0), \vec{e_1}(0,0,1)\}$ o en física $\{\vec{i}(1,0,0), \vec{j}(0,1,0), \vec{k}(0,0,1)\}$

c) <u>Canvi de base de l'espai</u>

- Components en la base canònica conegudes les components en una base B

<u>EXEMPLE</u>

Suposem una base B $=\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w}\}$ on les components del vector $\vec{t}$ en la base B són (-5, 3, 1)

$$\vec{t}\ = (-5,3,1)_{\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\vec{w}\}}$$

I també se sap les components dels vectors de la base B en la base canònica ,
$\vec{u}$ (1,-1,1); $\vec{v}$ (3,1,2) i $\vec{w}$ (0,3,5). Aleshores:

$\vec{t} = -5\cdot\ \vec{u} + 3\cdot\ \vec{v}\ + 1\cdot\vec{w}\ = -5(1,-1,1) + 3(3,1,2) + 1(0,3,5\ ) = (4,11,6)$ són les components del vector en la base canònica

- Components en una base B conegudes les components en la base canònica

EXEMPLE

Suposem que se sap les components d'un vector $\vec{t}(4,11,6)$, en la base canònica ,i que també es coneixen les components de tres vectors en aquesta base $\vec{u}$ (1,-1,1); $\vec{v}$ (3,1,2) i $\vec{w}$ (0,3,5). Quines seran les components de $\vec{t}$ en la base B ={$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$}

$\vec{t}$ = a· $\vec{u}$ + b· $\vec{v}$ + c· $\vec{w}$ → $(4,11,6)$ = a(1,-1,1) + b (3,1,2) + c(0,3,5) →

$$\begin{cases} a + 3b = 4 \\ -a + b + 3c \quad = 11 \\ a + 2b + 5c = 6 \end{cases}$$

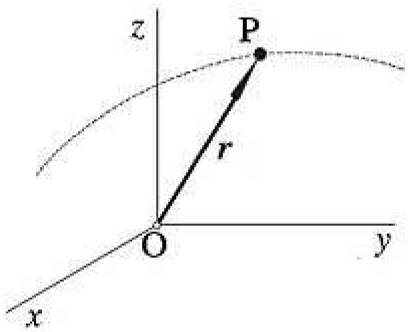
Si resolem el sistema a = - 5 ; b = 1 i c = 1 ales hores

$$\vec{t} = (-5,3,1)_{\{\vec{u}\ ,\vec{v}\ ,\vec{w}\}}$$

d) Sistemes de referència

Un *sistema de referència* és un conjunt format per l'origen de coordenades i tres vectors que formen una base {O, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$}

Anomenem vector de posició aquell que té els seu origen en l'origen de coordenades i el seu extrem en un punt P de l'espai s'escriu $\overrightarrow{OP}$

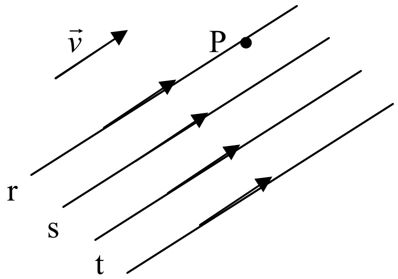


NOTA

Pot semblar que els punts i els vectors s'escriuen de la mateixa manera, però no es aixi, cal recordar que en el cas dels punts hem de parlar de coordenades i en el cas de vectors diem components.

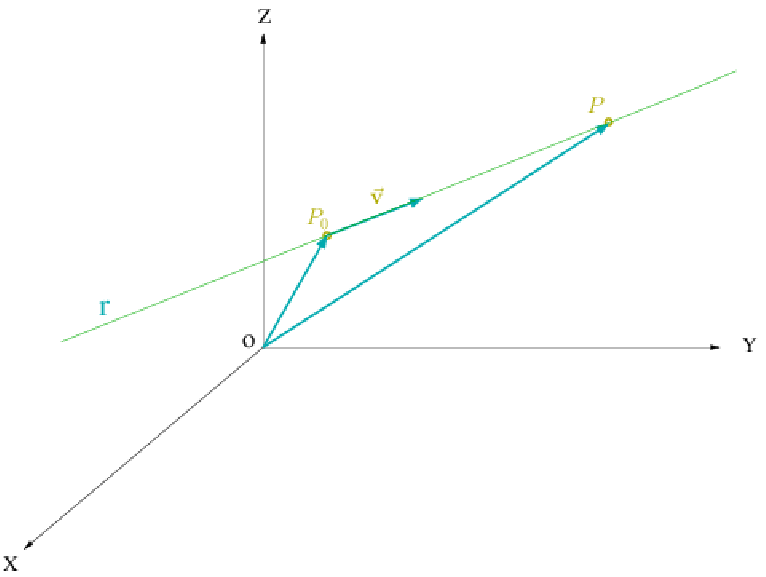
Per exemple quan escrivim P(2,-3, 7) parlem de coordenades del punt , i si anotem $\overrightarrow{OP}$ (2,-3,7) anomenarem components del vector.

6.2. EQUACIONS DE LA RECTA



Totes les rectes tenen la direcció del vector $\vec{v}$, però només la recta r passa per el punt P.

Per tant un recta que da determinada per un punt i un vector director.



Sigui $P_0(p_1,p_2,p_3)$ el punt pel que passa la recta, $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ el vector director i P (x,y,z) qualsevol punt de la recta. Del gràfic anterior:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{v}$ → Equació vectorial de la recta

Desenvolupant l'expressió anterior:

$(x,y,z) = (p_1,p_2,p_3) + \lambda\,(v_1,v_2,v_3)$

$$\left.\begin{aligned} x &= p_1 + \lambda v_1 \\ y &= p_2 + \lambda v_2 \\ z &= p_3 + \lambda v_3 \end{aligned}\right\}$$ → Equació paramètrica de la recta

Si aïllem el paràmetre λ de cadascuna de les tres equacions anteriors i igualem:

$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}$ → Equació continua de la recta

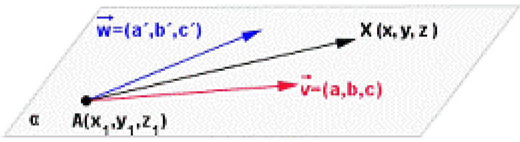
L'equació continua és una igualtat de tres membres, que podem expressar en forma de sistema de dues equacions:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-p_1}{v_1}=\dfrac{y-p_2}{v_2} \\ \dfrac{x-p_1}{v_1}=\dfrac{z-p_3}{v_3} \end{array}\right\}$$

Que al desenvolupar quedarien de la forma

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\}$$ → <u>Equació general o implícita de la recta</u>

6.3. <u>EQUACIONS DEL PLA</u>



Determinación lineal del plano

Un pla queda determinat per un punt $P_0(p_1,p_2,p_3)$, i dos vectors $\vec{v}$ (v_1, v_2, v_3) i $\vec{w}$ (w_1, w_2, w_3) linealment independents. Si i P (x,y,z) qualsevol punt del pla.

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+\lambda\cdot\vec{v}+\mu\cdot\vec{w}$ → <u>Equació vectorial del pla</u>

Desenvolupant l'expressió anterior:

$(x,y,z) = (p_1,p_2,p_3) + \lambda\,(v_1,v_2,v_3) + \mu(w_1,w_2,w_3)$

$$\left.\begin{array}{l} x=p_1+\lambda v_1+\mu w_1 \\ y=p_2+\lambda v_2+\mu w_2 \\ z=p_3+\lambda v_3+\mu w_3 \end{array}\right\}$$ → <u>Equació paramètrica del pla</u>

$$\begin{vmatrix} x-p_1 & v_1 & w_1 \\ y-p_2 & v_2 & w_2 \\ z-p_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}=0$$ → <u>Equació general o implícita del pla</u>

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

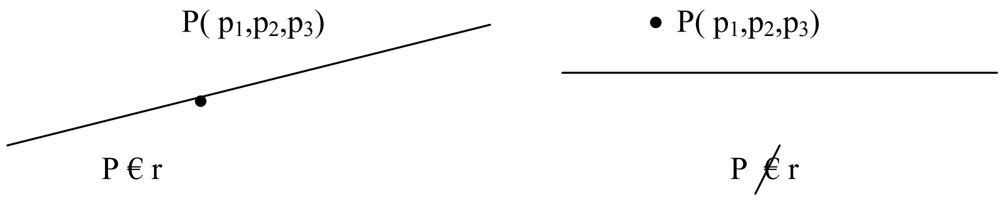
El vector (A,B,C) ès perpendicular a qualsevol vector del pla s'escriu $\vec{n}$ i s'anomena *vector normal* al pla.

6.3. **POSICIÓ RELATIVA DELS ELEMENTS DEL PLA**

6.3.1. POSICIÓ RELATIVA D'UN PUNT I UNA RECTA

Donat un punt P i una recta r nomes hi han dues possibilitats:

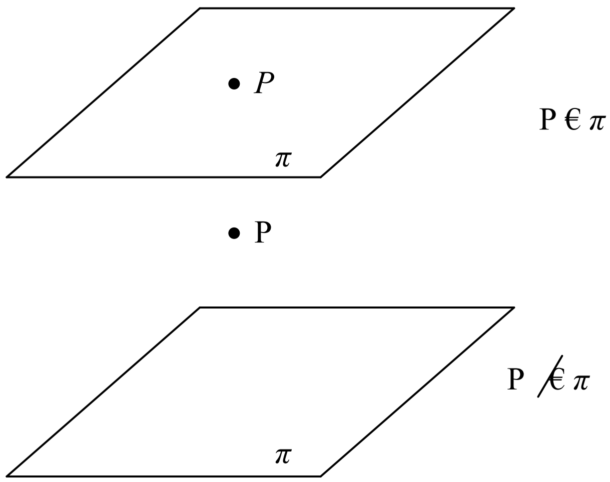
- El punt pertany a la recta→ El punt compleix l'equació de la recta
- El punt no pertany a la recta → El punt no compleix l'equació de la recta



6.3.2. POSICIÓ RELATIVA D'UN PUNT I I PLA

Donat un punt P i un pla π nomes hi han dues possibilitats:

- El punt pertany al pla → El punt compleix l'equació del pla
- El punt no pertany al pla → El punt no compleix l'equació del pla

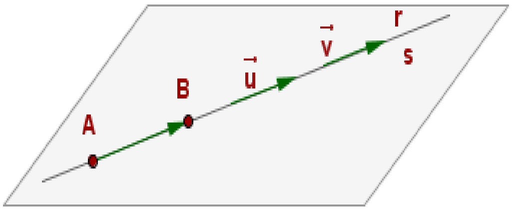


6.3.3. POSICIÓ RELATIVA DE DUES RECTES

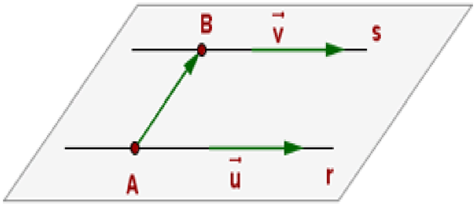
Geomètricament

Considerem una recta r que definida per el punt A i el vector director $\vec{u}$, i una altra recta s determinada pel punt B i vector director $\vec{v}$. Estudiem les possibles posicions:

a) Els vectors directors tenen la mateixa direcció (són linealment dependents) , les rectes poden ser:
a_1) Coincidents → A € s i B € r
a_2) Paral·leles → A $\notin s$ o B $\notin$ r



Rectes coincidents

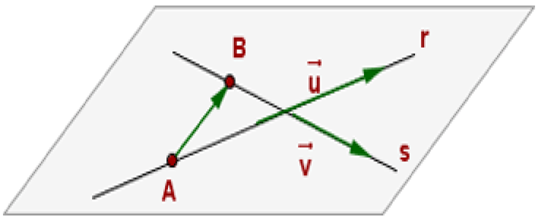


Rectes paral·leles

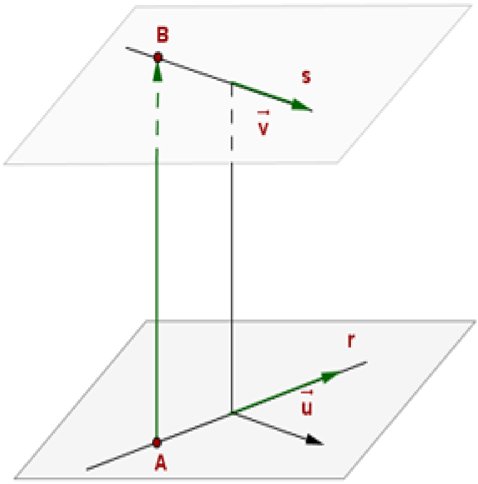
b) Els vectors directors tenen diferent direcció, (són linealment independents) les rectes poden ser:

b_1) Secants es a dir es tallen en un punt $\rightarrow$ les dues rectes pertanyen al mateix pla $\rightarrow$ els vectors $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ són linealment dependents

b_2) Es creuen $\rightarrow$ les dues rectes pertanyen a plans diferents $\rightarrow$ els vectors $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ són linealment independents



Rectes secants



Rectes que es creuen

<u>Algebraicament</u>

Considerem dues rectes expressades en forma general o implícita:

$$r: \begin{cases} Ax + By + CZ = D \\ A'x + B'y + C'Z = D \end{cases} \qquad s: \begin{cases} A''x + B''y + C''Z = D \\ A'''x + B'''y + C'''Z = D \end{cases}$$

Es tracta d'estudiar la intersecció discutint el sistema que formen les quatre equacions juntes

$$\begin{cases} Ax + By + CZ = D \\ A'x + B'y + C'Z = D \\ A''x + B''y + C''Z = D \\ A'''x + B'''y + C'''Z = D \end{cases}$$

Matriu associada al sistema i matriu ampliada

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \text{ i } M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{array}\right)$$

Les matrius M i M' tenen un rang mínim de 2, ja que si no l'expressió de r (s) no seria una recta
En el cas de M el rang màxim es de 3 i el de M' té un rang màxim de 4

Estudiem totes les possibilitats:

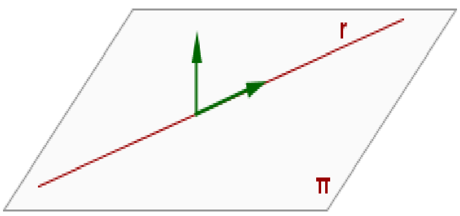
Rang M	Rang M'	Descripció del sistema	Posició relativa
2	**2**	**SCI** (∞ solicions) Un grau de llibertat	Una sola direcció i∞ punts en comú **Rectes coincidents**
	3	**SI** (No té solució)	Una sola direcció i cap punt en comú **Rectes paral·leles**
3	**3**	**SCD** (una única solució)	Un punt en comú **Rectes secants**
	4	**SI**(No té solució)	Dues direccions i cap punt en comú **Rectes que es creuen**

6.3.4. <u>POSICIÓ RELATIVA D'UNA RECTA I UN PLA</u>

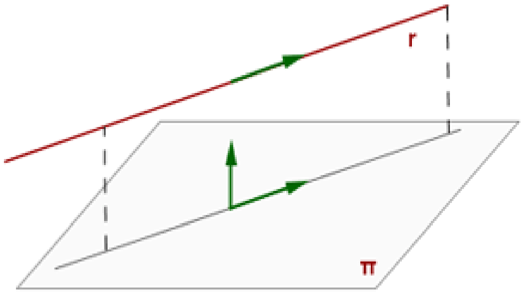
<u>Geomètricament</u>

Considerem una recta r que definida per el punt A i el vector director $\vec{u}$, i un pla π determinat per un punt B i un vector normal $\vec{n}$. Estudiem les possibles posicions:

a) Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{n}$ són perpendiculars ($\vec{u} \perp \vec{n}$):
   a_1) la recta esta continguda en el pla $\rightarrow$ $A \in \pi$
   a_2) la recta és paral·lela al pla $\rightarrow$ $A \notin \pi$

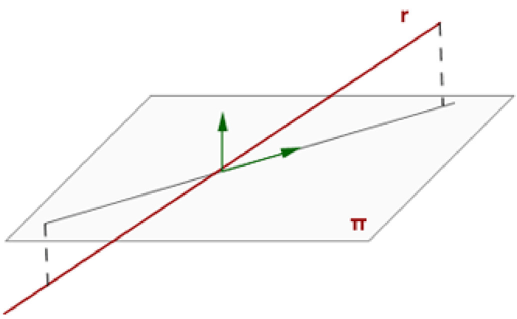


Recta continguda en el pla



Recta paral·lela al pla

b) Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{n}$ no són perpendiculars, la recta i el pla són secants, es a dir es tallen en un punt.



<u>Algebraicament</u>

Considerem una recta r i un pla π expressats en forma general o implícita:

$$r: \begin{cases} Ax + By + CZ = D \\ A'x + B'y + C'Z = D \end{cases} \qquad \pi: A''x + B''y + C''z = D''$$

Es tracta d'estudiar la intersecció discutint el sistema que formen les tres equacions juntes

$$\begin{cases} Ax + By + CZ = D \\ A'x + B'y + C'Z = D \\ A''x + B''y + C''Z = D \end{cases}$$

Matriu associada al sistema i matriu ampliada

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \text{ i } M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{array}\right)$$

Les matrius M i M' tenen un rang mínim de 2, ja que si no l'expressió de r no seria una recta, i un rang màxim de 3

Rang M	Rang M'	Descripció del sistema	Posició relativa
2	**2**	**SCI** (∞ solicions) Un grau de llibertat	Una sola direcció i ∞ punts en comú **Rectes contingudа en el pla**
	3	**SI** (No té solució)	Una sola direcció i cap punt en comú **Recta paral·lela al pla**
3	**3**	**SCD** (una única solució)	Un punt en comú **Recta i pla són secants**

6.3.4. POSICIÓ RELATIVA DE DOS PLANS

Geomètricament

Considerem un pla π_1 determinat per un punt A i un vector normal $\vec{n}_1$. I un altre pla π_2 definit per un punt B i un vector normal $\vec{n}_2$. Estudiem les possibles posicions:

a) Si $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$, són linealment dependents (components proporcionals):

   a_1) Plans coincidents si $A \in \pi_2$ i $B \in \pi_1$
   a_2) Plans paral·lels si $A \notin \pi_2$ o $B \notin \pi_1$

b) Si $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$, són linealment independents els plans són secants, es tallen en una recta

Algebraicament

Considerem dos pla π_1 i π_2 expressats en forma general o implícita:

$\pi_1 = Ax + By + CZ = D$ i $\pi_2 = A'x + B'y + C'Z = D'$ i

Es tracta d'estudiar la intersecció discutint el sistema que formen les dues equacions juntes

$$\begin{cases} Ax + By + CZ = D \\ A'x + B'y + C'Z = D' \end{cases}$$

Matriu associada al sistema i matriu ampliada

$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ i $M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{array}\right)$

Les matrius M i M' tenen un rang mínim de 1 i un rang màxim de 2

Rang M	Rang M'	Descripció del sistema	Posició relativa
1	**1**	**SCI** (∞ solicions) Dos grau de llibertat	∞ punts en comú **Plans coincidents**
	2	**SI** (No té solució)	Cap punt en comú **Plans paral·lels**
2	**2**	**SCI** (∞ solucions) Un grau de llibertat	∞ punts en comú **Plans són secants** (es tallen en una recta)

6.3.5. POSICIÓ RELATIVA DE TRES PLANS

Algebraicament

Considerem tres pla π_1 , π_2 i π_3 expressats en forma general o implícita:

$$\pi_1 = Ax + By + CZ = D$$
$$\pi_2 = A'x + B'y + C'Z = D'$$
$$\pi_3 = A''x + B''y + C''Z = D'' \text{ i}$$

Es tracta d'estudiar la intersecció discutint el sistema que formen les dues equacions juntes

$$\begin{cases} Ax + By + CZ = D \\ A'x + B'y + C'Z = D' \\ A''x + B''y + C''Z = D'' \end{cases}$$

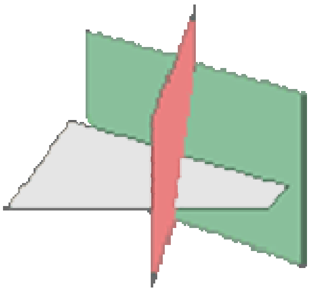
Matriu associada al sistema i matriu ampliada

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \text{ i } M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{array}\right)$$

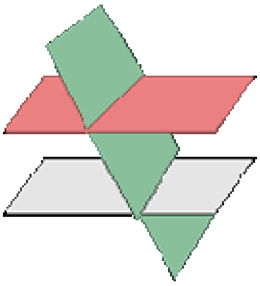
Les matrius M i M' tenen un rang mínim de 1 i un rang màxim de 3

<table>
<tr><th>Rang M</th><th>Rang M'</th><th>Descripció del sistema</th><th>Posició relativa</th></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>SCD
(una única solució)</td><td>Un punt en comú
Els tres plans es tallen en un punt (1)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">SI (No té solució)
Els tres plans no intersequen a la vegada</td><td>Dos plans paral·lels i un altre els intersecta (2)</td></tr>
<tr><td>Plans secants dos a dos (3)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">SCI (∞ solucions)
Un grau de llibertat
Els tres plans intersequen en una recta</td><td>Dos plans coincidents i l'altre els talla amb una recta (4)</td></tr>
<tr><td>Cap pla no és coincident ni paral·lel a un altre i es tallen en una recta (5)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">SI (No té solució)
Els tres plans no intersequen a la vegada</td><td>Dos plans són coincidents i un altres paral·lel (6)</td></tr>
<tr><td>Els tres plans són paral·lels (7)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>SCI (∞ solicions)
Dos grau de llibertat</td><td>Els tres plans són coincidents (8)</td></tr>
</table>

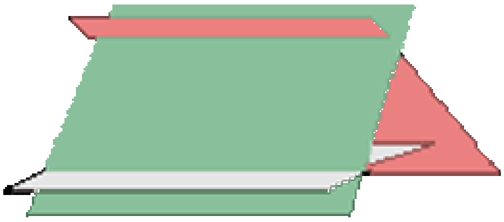
(1)



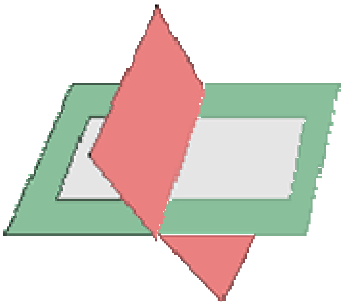
(2)



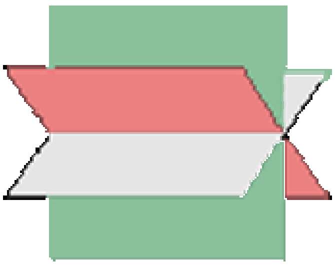
(3)



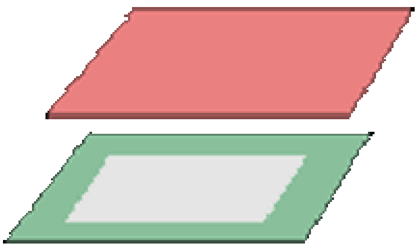
(4)



(5)

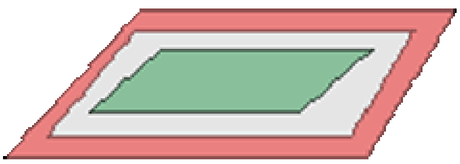


(6)



(7)

(8)

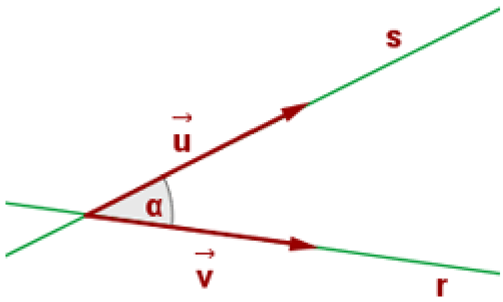


6.4. ANGLES

6.4.1. ANGLE ENTRE DUES RECTES

L'angle que formen dues rectes és el mateix que l'angle que formen els seus vectors directors.

Considerem una recta r que definida per el punt A i el vector director $\vec{v}_r$, i una altra recta s determinada pel punt B i vector director $\vec{v_s}$. Aleshores:



$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v_s}|}{|\vec{v_r}| \cdot |\vec{v_s}|} \rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v_s}|}{|\vec{v_r}| \cdot |\vec{v_s}|}\right)$$

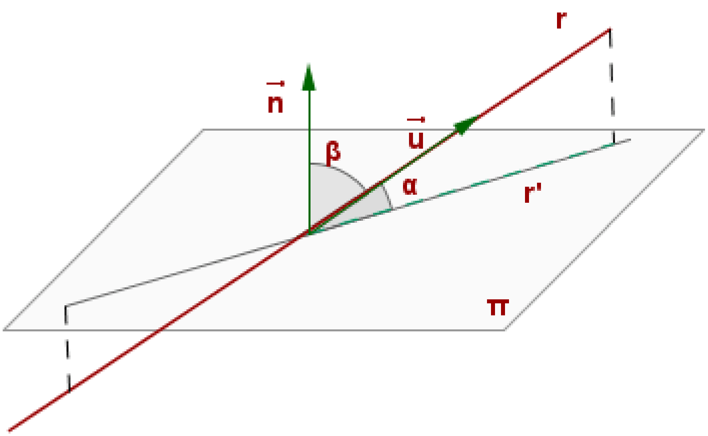
6.4.2. ANGLE ENTRE UNA RECTA I UN PLA

L'angle entre una recta i un pla és l'angle complementari (90 – α) al angle format pel vector director de la recta i l'angle normal al pla.

Considerem una recta r que definida per el punt A i el vector director $\vec{v}$, i un pla π determinat per un punt B i un vector normal $\vec{n}$. Llavors:

Si recordem que cos(90 – α) = sin α →

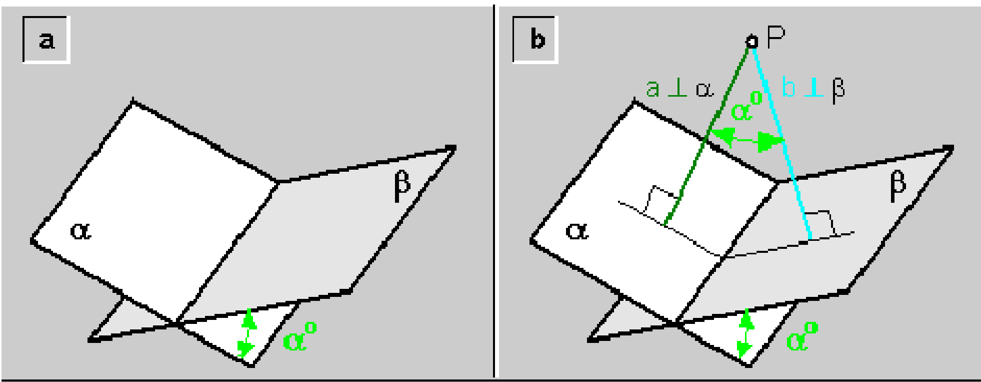
$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}\right)$$



6.4.3. ANGLE ENTRE DOS PLANS

L'angle que formen dos plans és el mateix angle que formen els vectors normals respectius.

Considerem un pla π_1 determinat per un punt A i un vector normal $\vec{n}_1$. I un altre pla π_2 definit per un punt B i un vector normal $\vec{n}_2$. Aleshores



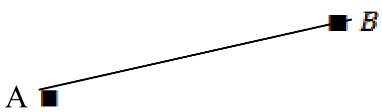
$$cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \rightarrow \alpha = cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right)$$

6.5. DISTÀNCIES

6.5.1. DISTÀNCIA ENTRE DOS PUNTS

Donats dos punts A(a_1, a_2, a_3) i B (b_1, b_2, b_3):

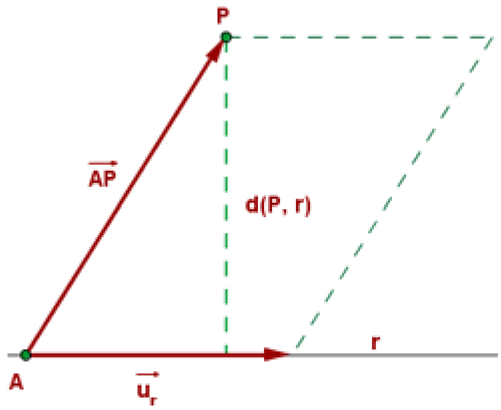
$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$



6.5.2. DISTÀNCIA D'UN PUNT A UNA RECTA

Considerem una recta r que definida per el punt $A(a_1, a_2, a_3)$ i el vector director $\vec{v}$ i un punt $P(p_1, p_2, p_3)$:

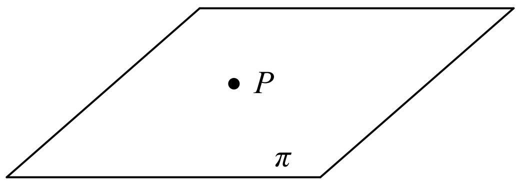
- Si el punt B és de la recta → $d(P,r) = 0$
- Si el punt no és de la recta → $d(P,r) = \frac{|\vec{v} x \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|}$



6.5.3. DISTÀNCIA D'UN PUNT A UN PLA

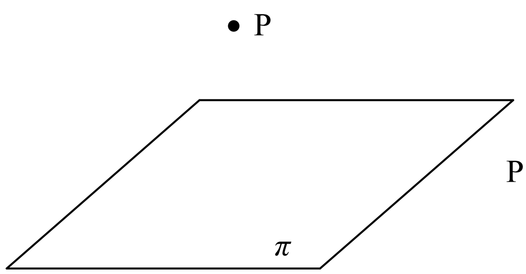
Considerem un punt $P(p_1, p_2, p_3)$ i un pla π_1 expressat en forma general o implícita $\pi_1 = Ax + By + CZ + D = 0$:

- Si el punt P és del pla → $d(P, \pi_1) = 0$



$P \in \pi$

- Si el punt no és del pla → $d(P, \pi_1) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C \cdot p_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

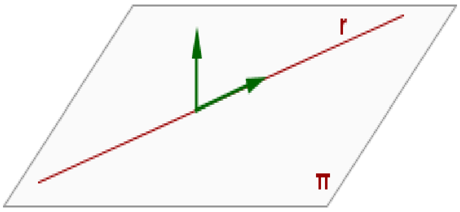


$P \notin \pi$

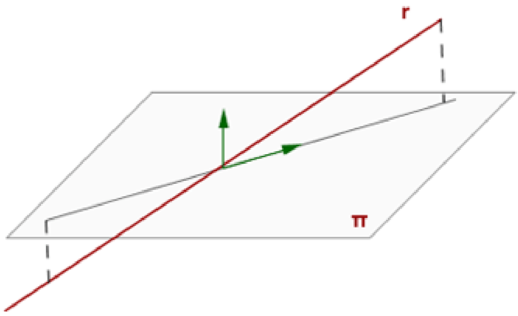
6.5.4. <u>DISTÀNCIA D'UNA RECTA A UN PLA</u>

Considerem una recta r i un pla π:

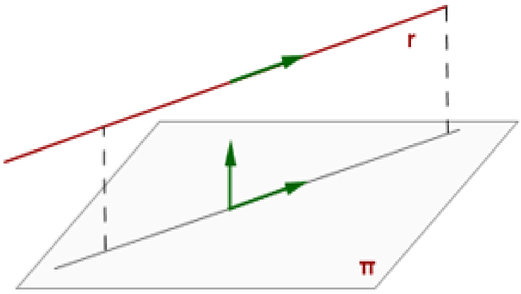
- Si la recta està continguda en el pla $\longrightarrow$ $d(r,\pi) = 0$



- Si la recta i el pla són secants $\longrightarrow$ $d(r,\pi) = 0$



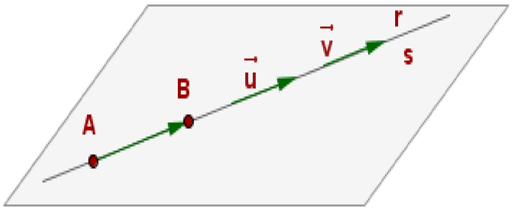
- Si la recta és paral·lela al pla $\longrightarrow$ $d(r,\pi) = d(P,\pi)$, essent P un punt qualsevol de la recta



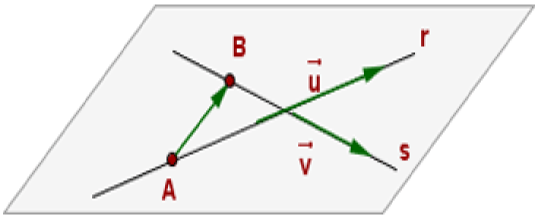
6.5.5. <u>DISTÀNCIA ENTRE DUES RECTES</u>

Considerem dues rectes r i s:

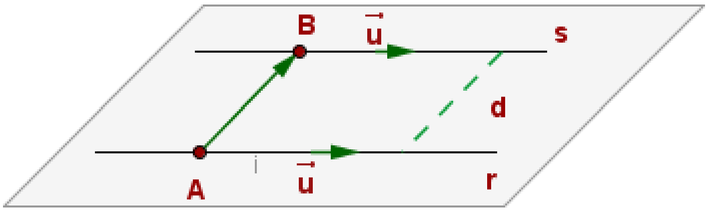
- Si les rectes són coincidents $\longrightarrow$ $d(r,s) = 0$



- Si les rectes són secants ⟶ d(r,s) = 0

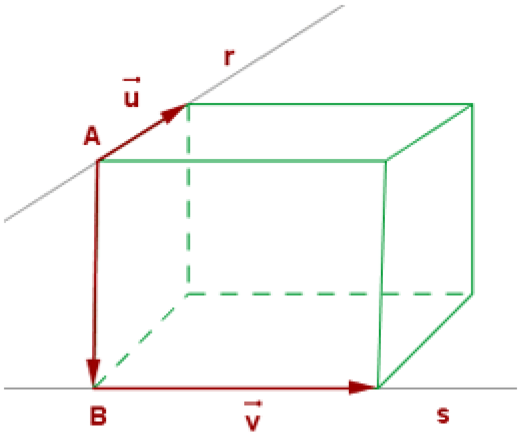


- Si les rectes són paral·leles ⟶ d(r,s) = d(A,s) = d(B,r) , on A és un punt qualsevol de la recta r i B un punt qualsevol de la recta s



- Si les rectes es creuen

$$d(r,s) = \frac{det[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}]}{|\overrightarrow{v_r} x \overrightarrow{v_s}|}$$



6.5.5. <u>DISTÀNCIA ENTRE DOS PLANS</u>

Considerem dos pla π_1 i π_2 :

- Si els dos plans són coincidents ⟶ d(π_1 ,π_2) = 0
- Si els dos plans són secants ⟶ d(π_1 ,π_2) = 0
- Si els plans són paral·leles ⟶ d(π_1 ,π_2) = d(P ,π_2) = d(Q, π_1), essent P un punt qualsevol de π_1 i Q un punt qualsevol de π_2