Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la Universitat. Curs 2006-2007

Matemàtiques

Sèrie 2

Responeu a TRES de les quatre qüestions i resoleu UN dels dos problemes següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts i el problema 4 punts.

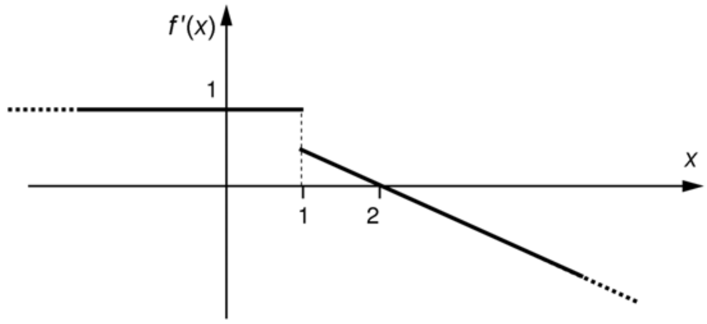
Podeu utilitzar la calculadora científica per al càlcul de funcions exponencials, logarítmiques, trigonomètriques i especials, així com per a realitzar càlculs estadístics. No es poden fer servir, però, calculadores o altres aparells que permetin fer més operacions que les esmentades.

QÜESTIONS

1. Trobeu l'equació del pla perpendicular a la recta $r:\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ que passa per l'origen de coordenades.

[2 punts]

2. La funció derivada $f'(x)$ de certa funció contínua $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix.



a) Digueu si $f(x)$ és derivable en tots els punts de $\mathbf{R}$ i per què.
b) Estudieu el creixement i el decreixement de $f(x)$.
c) Trobeu si $f(x)$ té algun extrem relatiu i, si és així, per a quin valor de x i de quin tipus.
d) Sabent que $f(0) = 1$, calculeu el valor de $f(1)$.

Justifiqueu totes les respostes.

[0,5 punts cada apartat]

3. Calculeu els valors del paràmetre a, $a \neq 0$, que fan que les tangents a la corba d'equació $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ en els punts d'inflexió siguin perpendiculars.
[2 punts]

4. Trobeu els punts de la recta r: $x - 1 = y + 2 = z$ que equidisten dels plans π_1: $4x - 3z - 1 = 0$ i π_2: $3x + 4y - 1 = 0$.
[2 punts]

PROBLEMES

5. Un magatzem té forma de prisma recte de base quadrada i un volum de 768 m^3. Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val 100 unitats per m^2, mentre que a través del sostre és de 300 unitats per m^2. La pèrdua pel sòl és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem perquè la pèrdua de calor total sigui mínima.
[4 punts]

6. A l'espai es consideren els tres plans d'equacions:
π_1: $x + 2y + z = 1$, π_2: $px + y + pz = 1$ i π_3: $px + y + 2z = 1$, on p és un paràmetre real.

a) Esbrineu per a quins valors de p els tres plans es tallen en un únic punt. Trobeu aquest punt quan $p = 1$.

b) Hi ha algun valor de p que faci que la intersecció comuna sigui una recta? Si és així, escriviu l'equació vectorial d'aquesta recta.

c) Trobeu quina és la posició relativa dels tres plans quan $p = 1/2$.

[2 punts l'apartat *a*, 1 punt l'apartat *b*, 1 punt l'apartat *c*]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la Universitat. Curs 2006-2007

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a TRES de les quatre qüestions i resoleu UN dels dos problemes següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts i el problema 4 punts.

Podeu utilitzar la calculadora científica per al càlcul de funcions exponencials, logarítmiques, trigonomètriques i especials, així com per a realitzar càlculs estadístics. No es poden fer servir, però, calculadores o altres aparells que permetin fer més operacions que les esmentades.

QÜESTIONS

1. En quin punt la recta tangent a la funció $f(x) = x \cdot e^x$ és paral·lela a l'eix d'abscisses? Escriviu l'equació de la recta tangent en aquest punt.
[2 punts]

2. Considereu els punts de l'espai $P = (-1, a - 1, 3)$, $Q = (0, a - 2, 1 - a)$ i $R = (2, -1, 6 - 6a)$.
a) Trobeu el valor de a per al qual els tres punts estan alineats.
b) Quan els tres punts estan alineats, quina és l'equació de la recta que els conté?
[1 punt cada apartat]

3. Busqueu els extrems relatius i els punts de tall amb els eixos, i feu una representació aproximada de la corba d'equació $y = x^4 - x^2$. A continuació, calculeu l'àrea del recinte tancat per aquesta corba i l'eix d'abscisses.
[1 punt pel càlcul d'extrems, els punts de tall i la gràfica; 1 punt pel càlcul de l'àrea]

4. Trobeu l'equació de la recta continguda en el pla π: $x + 2y + 6z - 2 = 0$, que talla els eixos OY i OZ.
[2 punts]

PROBLEMES

5. Considereu la recta d'equació $r: x = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$.

a) Expresseu el quadrat de la distància d'un punt qualsevol (x, y, z) de la recta al punt $P = (1, 2, 5)$ com una funció de la coordenada x.
b) Trobeu quin valor de x fa mínima aquesta funció, deduïu quin punt Q de la recta és el més proper a P i calculeu la distància del punt a la recta.
c) Escriviu l'equació de la recta que passa per P i Q i comproveu que és perpendicular a r.

[1,5 punts l'apartat *a*; 1,5 punts l'apartat *b*; 1 punt l'apartat *c*]

6. Discutiu el sistema següent $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + py + 2z = 10 \\ px + 6y + 3z = 12 \end{cases}$ en funció del paràmetre p. Doneu la interpretació geomètrica del sistema en cada cas i resoleu-lo quan sigui compatible.

[4 punts]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés